

## LA IMPORTANCIA DE LA VISUALIZACIÓN GEOMÉTRICA COMO ESTRATEGIA DE ANÁLISIS

Héctor E. Rubio Scola, Roberto López, Mercedes Anido  
Universidad Tecnológica Nacional. Fac. Regional Rosario. (Argentina)  
FCEE, FCEIA, CIUNR, Universidad Nacional de Rosario. (Argentina)  
[erubio@fceia.unr.edu.ar](mailto:erubio@fceia.unr.edu.ar)

Campo de investigación: pensamiento geométrico. Nivel educativo: superior  
Palabras clave: pensamiento visual, modelización geométrica, poliedros, programación lineal

### Resumen

En este trabajo se pone en evidencia la importancia de las representaciones visuales como modelizadoras de problemas en áreas de aplicación como serían los problemas de ingeniería. En una aplicación al problema de detección de fallas en sistemas dinámicos, se presenta una metodología para la separación de poliedros de gran tamaño. Utilizando técnicas de programación lineal, se relacionan cientos o miles de variables, formando sistemas de ecuaciones lineales raras. Se ejemplifica así, la necesidad de los referentes geométricos en la formación básica. Se muestra en un ejemplo concreto, la importancia del pensamiento visual en la formación básica de la ingeniería y su utilización en una modelización que utiliza formas tridimensionales visualizables.

### El problema didáctico

En la resolución de problemas de Ingeniería, como en general en todo proceso creativo, no basta la aplicación cuidadosa de reglas; se necesita educar la capacidad de análisis, síntesis y correlación así como una intuición bien desarrollada. Como nuestra percepción es prioritariamente visual, el apoyo continuo en lo visual está muy presente en, en particular en las tareas de modelización matemática de problemas de ingeniería.

A pesar de la gran riqueza de los contenidos visuales, intuitivos y geométricos que están constantemente presentes en el mecanismo mental, ya sea para presentar un tema, demostrar un teorema o resolver un problema real; en general, no se aprovechan lo suficiente las “visualizaciones geométricas” como estrategia de análisis.

Esta carencia en la formación básica se ha agravado en los últimos años donde por la urgencia en la introducción de otros contenidos se han reducido en las actualizaciones curriculares las horas asignadas ya sea a la Geometría Analítica y/o a la Geometría Descriptiva. Surge así la necesidad de resaltar la importancia de la formación de un pensamiento visual para la resolución de problemas.

### Objetivo

En este trabajo se busca hacer un aporte a la toma de conciencia de la importancia de la representación visual en la modelización matemática de problemas y presentar un ejemplo de una estrategia de análisis.

Se presenta un problema de aplicación a la Ingeniería donde la representación geométrica es herramienta simplificadora y el hilo conductor de una modelización matemática constituida por sistemas raros de cientos o miles de ecuaciones lineales deducidas a partir de las herramientas de la Geometría Analítica, el Álgebra Lineal y la Programación Lineal. Los sucesivos pasos del proceso del cálculo son interpretados por poliedros.

### Marco teórico: el modelo matemático como representación del objeto físico

Desarrollar el pensamiento visual y favorecer las habilidades de visualización son dos objetivos claves en la educación geométrica en el profesional de la ingeniería.

Para la enseñanza de la matemática se trata de buscar variados accesos representacionales; una escritura, una notación, un símbolo, representan un objeto matemático: un número, una función, un vector. Lo mismo los trazos y las figuras representan objetos matemáticos: un segmento, un punto, un círculo. Jamás se debe confundir a los objetos matemáticos con su representación (Duval, 1999).

La distinción entre un objeto y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. No obstante, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias porque, los objetos matemáticos no son directamente accesibles desde la percepción o a partir de una experiencia intuitiva inmediata, como lo son los objetos comúnmente señalados como “reales” o “físicos”.

Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, con sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento; una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento y juegan un papel primordial para el desarrollo de las representaciones mentales ya que éste depende de una interiorización de las representaciones semióticas, del mismo modo que las imágenes mentales son una interiorización de las percepciones (Duval, 1999).

McGee (1979) define la visualización espacial como aquellas tareas que implican la habilidad mental de manipular, rotar, torcer o invertir gráficos de objetos presentados como estímulo visual. Kersh y Cook (1979), extienden esta definición a la transformación mental de un objeto.

Connor y Serbin (1980) reportan que las habilidades de visualización espacial contribuyen significativamente en los logros del aprendizaje de la Matemática.

Estos últimos autores trabajaron con dos Test: “Paper Folding Test” y “Card Rotation Test”.. Los mismos miden las habilidades de visualización espacial que son necesarias para que mentalmente el estudiante mueva, rote o altere partes de las representaciones gráficas de las funciones matemáticas.

Estos estudios han reportado positivas correlaciones entre las habilidades espaciales y desempeño matemático. Tartre (1990) ha establecido que la habilidad espacial puede ser un indicador general más de una particular forma de organización, a través de la cual una nueva información es ligada a estructuras de conocimientos previos para ayudar a que tenga sentido el nuevo conocimiento.

Fennema (1975) ha establecido que la visualización espacial está lógicamente relacionada a la Matemática. Fennema y Tartre (1985) sugieren que una baja habilidad de visualización espacial puede ser un índice de debilidad para resolución de problemas matemáticos en las mujeres más que en los varones.

Estudios en Tecnología Computacional y Educación Matemática han confirmado los efectos positivos de las calculadoras graficadoras en el salón de clase.

Ruthven (1990) dice que el acceso a la información tecnológica puede ser una importante influencia en el interés y acercamiento a la matemática y en los logros de los estudiantes.

Las experiencias acumuladas durante quince años en nuestro proyecto “La Enseñanza de la Matemática con Herramientas Computacionales” (Anido et al, 2000), muestran que la instrucción matemática con tecnología computacional puede tener un impacto positivo en los resultados de los aprendizajes.

En la modelización del problema que se presenta a continuación tenemos distintos registros: uno relativo al Cálculo (sistemas de ecuaciones diferenciales lineales) otro relativo a los poliedros (Matemática Combinatoria y Geometría Descriptiva). En cada uno de ellos se trabaja hasta llegar a una solución. De la relación final entre los mismo dependerá la interpretación de esa solución y para ello veremos la importancia del registro visual que deriva de la proyección del poliedro inicial.

### **La representación geométrica en la interpretación y solución de un problema**

En la aplicación al problema de detección de fallas en sistemas dinámicos, se presenta una metodología para la separación de poliedros de gran tamaño. Utilizando técnicas de programación lineal, se relacionan cientos o miles de variables, formando sistemas de ecuaciones lineales raras. Suponemos que los comportamientos normales y fallados de un proceso pueden ser modelados por dos sistemas lineales. Sus variables se mueven dentro de dos poliedros: uno para el sistema fallado y el otro para el sistema en funcionamiento normal. Una buena interpretación de estos dominios es necesaria para comprender algunos problemas que se presentan en el comportamiento de estos sistemas con gran número de variables.

A través de una señal de test que pone en evidencia la falla, se logra que los poliedros sean disjuntos, obteniendo un hiperplano separador, que resuelve el problema de la separación de los dos subespacios diferentes que contienen las trayectorias de ambos sistemas. En el ejemplo que se presenta, el software SCILAB (Bunks et al, 1999) permite proyectar el problema y visualizarlo en pantalla, facilitando una representación para análisis global. No se presentan en detalla la metodología de cálculo para su completo análisis nos remitimos a Rubio Scola et al (2003).

En esta filosofía, Rubio Scola et al (2003) busca construir explícitamente una señal que garantice, cuando esto sea posible, la detección de la falla en un intervalo de tiempo finito dado. Ha desarrollado también un test simple de detección de falla cuando la señal de test está aplicada. Este último problema lleva a una modelización geométrica con poliedros que constituyen la representación de sistemas de ecuaciones raras de gran tamaño. A continuación describiremos el proceso que se sigue para verificar el buen funcionamiento del sistema.

Periódicamente, durante la operación normal del sistema, una señal de test predeterminada, es inyectada en un período finito de tiempo. Esta señal permite mediante un filtro, detectar la falla. La periodicidad de la utilización de la señal de falla quedará fijada por un plan de confiabilidad también predeterminado.

El problema que se considera en este trabajo tiene en total dos etapas de cálculo. La primera es encontrar una señal de test tal que las posibles entradas y salidas del sistema normal sea disjunto de las posibles entradas y salidas del sistema en falla. La segunda es, para una señal test dada, reconocer si el sistema se encuentra en falla o no.

Los poliedros se pueden considerar como representaciones geométricas de sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Se presentan a continuación los sistemas de ecuaciones e inecuaciones que corresponden a las situaciones de funcionamiento normal y en estado de falla respectivamente. Uno representado por las ecuaciones e inecuaciones ((1) (2)), con  $i = s$  "sistema normal". Otro que representa al sistema con una falla determinada  $i = f$ , "sistema fallado".

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i(k)x_i(k) + B_i(k)u(k) + b_i(k) + M_i(k)v_i(k) & y(k) &= C_i(k)x_i(k) + D_i(k)u(k) + d_i(k) + \\ N_i(k)v_i(k) & & & \end{aligned} \quad (1) \text{ con } k = 0, \dots, (N-1)$$

$v$  es la señal test,  $u$  e  $y$ , son las entradas y las salidas que se miden “on-line”.  $A, B, C, D, M, N, b$  y  $d$  son matrices y vectores con dimensiones apropiadas que dependen de  $v(k)$ . La secuencia  $v_i(k)$  es desconocida y representa las perturbaciones, ruidos y entradas no medibles. La perturbación  $v_i(k)$  y la entrada  $u$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} R_{vi}(k)u_i(k) &\leq p_{ui}(k) \\ R_{ui}(k)v_i(k) &\leq p_{vi}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $R_{vi}(k), R_{ui}(k), p_{vi}(k), p_{ui}(k)$  son vectores y matrices dadas con dimensiones, también apropiadas que dependen de  $v(k)$ . La única hipótesis que establecemos es que  $R_{vi}(k), R_{ui}(k)$  sean tales que las ecuaciones anteriores sean consistentes.

Tenemos entonces un prisma de sección poligonal de altura no acotada correspondiente al sistema normal ((1), (2))  $i = s$  y otro prisma de sección poligonal de altura no acotada correspondiente al sistema fallado  $i = f$ :

$$\begin{aligned} F_i w &= p_i \\ E_i w &\leq q_i \end{aligned} \quad (3)$$

Donde  $w = (x_i(0), y(0), u(0), v_i(0), \dots, x_i(N-1), y(N-1), u(N-1), v_i(N-1))$ ,

### La idea

Para una perfecta detección de la falla se debe verificar que los poliedros que representan los conjuntos solución de los sistemas (3)  $i = s, f$  no tengan puntos de intersección, vale decir el siguiente sistema que constituido con todas las ecuaciones e inecuaciones consideradas sea incompatible. Es decir que este nuevo sistema

$$\begin{aligned} F \xi &= p \\ E \xi &\leq q \end{aligned} \quad (4)$$

con  $F = [F'_s, F'_f]'$ ,  $E = [E'_s, E'_f]'$ ,  $p = [p'_s, p'_f]'$  y  $q = [q'_s, q'_f]'$  no tiene que tener solución. La falla que se busca detectar queda en evidencia cuando, por adecuadas perturbaciones (señal de test  $u$ ), el sistema fallado puede ser separado del sistema normal. Geométricamente equivale a buscar una intersección vacía entre los dos poliedros que respectivamente representan al “sistema normal” y al “sistema fallado”. Esto nos permitirá hablar de un poliedro “sano” y de un poliedro “enfermo”.

A los fines de la detección del funcionamiento del sistema en un punto preciso, en el funcionamiento online, lo que habría que determinar es a que poliedro pertenece. Dado que la verificación continua de los sistemas (3)  $i = s, f$  exige un gran trabajo operacional (con el consiguiente gasto de tiempo). Se puede facilitar el problema determinando un hiperplano separador de los dos poliedros convexos. Una vez conocido, sólo se necesita saber, de que lado del hiperplano, se encuentra el punto de funcionamiento del test.

La existencia de ese hiperplano queda garantizada por la teoría clásica de poliedros ya que, siempre existe un hiperplano separador de dos poliedros convexos disjuntos.

El punto de funcionamiento del sistema que queremos analizar pertenecerá alguno de los poliedros, por lo tanto estará contenido en alguno de los dos semiespacios, determinados por el hiperplano separador.

Considerando ahora, un semiespacio normal y un semiespacio fallado, se llama semiespacio normal al que contiene al poliedro que representa al sistema con funcionamiento normal y semiespacio fallado al que contiene al poliedro que representa al sistema fallado.

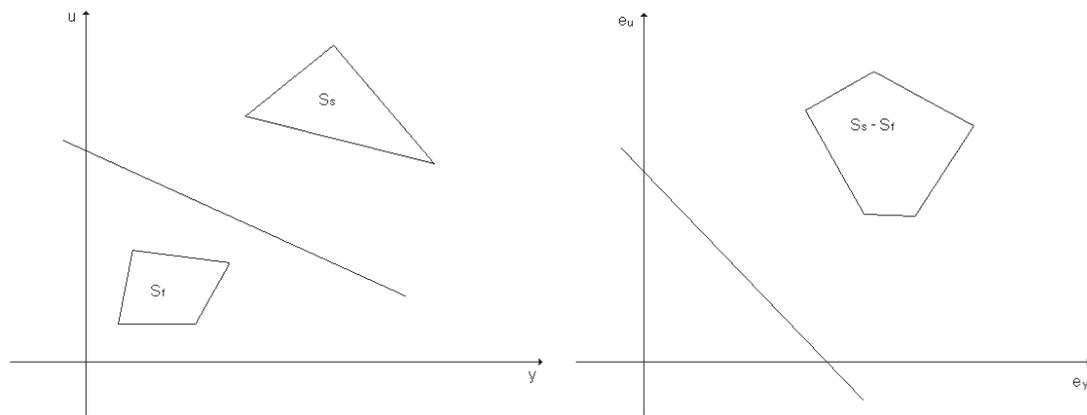
El problema de determinación del funcionamiento del sistema o sea de la pertenencia o no pertenencia al “poliedro enfermo” se reduce ahora la verificación de una sola inecuación lineal por el punto en cuestión.

Con el objeto de simplificar aún mas la modelización, se observa, que si se considera el conjunto diferencia  $S_s - S_f$  de los dos poliedros, la no existencia de puntos de intersección entre  $S_s$  y  $S_f$  es equivalente a la no pertenencia del origen de coordenadas al conjunto diferencia  $S_s - S_f$ . Por otra parte la teoría de poliedros clásica nos garantiza que el conjunto diferencia de dos poliedros convexos es otro poliedro convexo. Se trata de conseguir un hiperplano que separe al origen del poliedro diferencia. La existencia del hiperplano queda demostrada por una propiedad que se puede enunciar formalmente por el siguiente lema

LEMA Sea  $S_s$  y  $S_f$  dos poliedros convexos no vacíos. Entonces existe un hiperplano separador de  $S_s$  y  $S_f$  si y sólo si el poliedro convexo  $S_s - S_f$  no contiene al 0, vale decir existe un hiperplano que separa el 0 y el poliedro convexo  $S_s - S_f$ .

Su demostración se puede encontrar en Rockafellar (1972).

Se puede, pues, realizar una nueva simplificación analizando la representación del problema a través de determinadas direcciones de proyección por métodos de Álgebra Lineal como se ejemplifica en las siguientes figuras



Luego el problema se reducirá a determinar analíticamente la ecuación del hiperplano:  $(e_u = h e_y + d)$  o sea los coeficientes de las variables o componentes del vector normal  $h$  y el término independiente  $d$ .

### Una estrategia para obtener un hiperplano separador basada en la optimización

En este último punto hemos utilizado recursos de Programación Lineal y Álgebra Lineal que permiten operar en grandes dimensiones. No obstante el análisis y determinación del hiperplano puede ser hecho utilizando sólo los recursos de Computación Gráfica que nos brinda un toolbox de poliedros que brinda directamente la gráfica de la proyección del “poliedro diferencia”. Por simple visualización del conjunto diferencia, cuya disyunción con el cero nos garantiza la separación de los sistemas normal y fallado, se establece la existencia de un hiperplano separador. Las pendientes posibles, también se obtienen por la visualización gráfica de pendientes de caras convenientemente elegidas. Se muestran dos gráficos que ilustran posibles situaciones.

### Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado el enfoque geométrico de un problema donde convergen campos conceptuales relativos a la Teoría de Control, Matemática Combinatoria, Algebra Lineal que se integran en una modelización basada en las propiedades de los poliedros y sus

representaciones algebraicas. Las distintas etapas del razonamiento muestran la riqueza de esas propiedades como herramientas del ingeniero.

La visualización de este modelo matemático como recurso de análisis, es formativa en sí misma y facilita la comprensión global de una modelización más abstracta. El interés de problemas de este tipo, es dar significación geométrica a recursos de cálculo numérico que si bien tienen su fundamento en conceptos teóricos del análisis matricial, son utilizados en forma totalmente mecánica en distintos campos de aplicación, sobre todo a partir del advenimiento de los formidables programas computacionales de cálculo simbólico y gráfico. Los problemas toman así un significado y esto, si bien no reemplaza a las demostraciones rigurosas, a las que se puede recurrir en las fuentes apropiadas, es una guía correcta y valiosa para el análisis, interpretación y validación de sus soluciones.

Se ha mostrado en un ejemplo concreto, la importancia del pensamiento visual en la formación básica de la ingeniería y su utilización en una modelización que utiliza formas tridimensionales visualizables.

Se cumple el objetivo de ejemplificar, la necesidad de los referentes geométricos en la formación básica.

### Referencias bibliográficas

- Anido, M., Rubio Scola, H. (2000) Un programa sobre el uso de herramientas C.A.S. en el aprendizaje de la matemática básica en las universidades nacionales de la provincia de Santa Fe, *Revista Lecturas Matemáticas*, 21(1), 67-77.
- Bunks, C., Chancelier, J.P., Delebecque, F., Gomez, C. (Editor), Goursat, M.; Nikoukhah, R., Steer, S. (1999). *Engineering and scientific computing with Scilab*. United Kingdom: Birkhauser.
- Connor, J.M., Sebin, L. A. (1980). *Mathematics, visual ability, and sex roles*. Washington, D.C., USA: National Institute of Education (DHEW).
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Vale.
- Fennema, E., Tartre, L., (1985) *The use of spatial visualization in mathematics by boys and girls*. Journal for Research in Mathematics Education. 16(3), 184-206.
- Fennema, E., (1975). Spatial Ability, Mathematics, and the Sexes, in E. Fennema (Ed.), *Mathematics Learning: What Research Says About Sex Differences*, Columbus, OH, ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Kersh, M. E., Cook, K. H. (1979). *Improving mathematics ability and attitude, a manual* Seattle, WA, USA: Mathematics Learning Institute; University of Washington.
- McGee, M. G.(1979). *Human spatial abilities: Sources of sex differences*. New York, USA: Praeger publishers.
- Nikoukhah, R. (1998). Guaranteed active failure detection and isolation for linear dynamical systems. *IEEE -AC*. 34(11), 1345-1358.
- Rockafellar R. T. (1972). *Convex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.
- Rubio Scola, H. E., Nikoukhah, R., Delebecque, F. (2003) Failure Detection Filter Design: a Linear Programming Approach. *Applied Mathematics and Computer Science*, 13 (4), 515-526.
- Ruthven, K.(1990) The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics* 21, 431-450.
- Tartre L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving, *Journal for Research in Mathematics Education* 21(1),47-60.
- Vasquez, J. L.(1991), The effect of the calculator on student achievement in graphing linear functions. Doctoral dissertation, University of Florida, 1990. Dissertation Abstracts International.