ALGUNAS INCONSISTENCIAS EN EL SISTEMA AXIOMÁTICO DEDUCTIVO DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES Y SUS IMPLICACIONES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA*

Marco Antonio Morales Salmerón, Santiago Ramiro Velázquez Bustamante
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
myr_1812@yahoo.com.mx, sramiro@prodigy.net.mx

Campo de investigación: pensamiento Geométrico. Nivel educativo: superior
Palabras clave: Elementos de Euclides, fallas lógicas, fundamentos, aprendizaje, geometría

Resumen
Este trabajo consiste en una investigación en proceso que analiza algunas problemáticas del sistema axiomático de Euclides y su impacto en el aprendizaje de la geometría. Enfocamos la atención en la superposición, la vaguedad de algunas definiciones, las imprecisiones de otras y las suposiciones inconscientes o tácitas que se utilizan en algunas demostraciones, (Kline, 1972; Hernández, 2001). Pretendemos mirar el estudio que al respecto hacen investigadores en este campo y como están presentes estos aspectos en las prácticas de profesores y estudiantes de licenciatura en su afán de aprender geometría.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la edad antigua y media estuvo basada en los Elementos de Euclides y siguió vigente como texto básico, en muchos lugares hasta bien avanzado el siglo XIX, a finales de éste y principios del siglo XX ocurrieron cambios importantes en la concepción de las matemáticas. Motivados por la aparición de las geometrías no euclídeas y por la influencia de nuevos modos de tratamiento del infinito matemático en la teoría de conjuntos de Cantor. Los matemáticos tuvieron que ocuparse más intensamente que nunca de establecer las bases de esta ciencia. Los fundamentos han sido sometidos a una severa observación, provocando una crisis.
La necesidad de fundamentar la geometría, viene dada por la preocupación de sistematizar la exposición que se hace en los Elementos y de eliminar algunos “defectos” de la exposición euclidea (Kline, 1972; Hernández, 2001). Entonces tenemos que los Elementos de Euclides en la actualidad no resolverían satisfactoriamente el problema de demostrar en geometría, porque el número de definiciones, axiomas, postulados que sirven como base para una demostración rigurosa de todos y cada uno de los teoremas que aparecen en los Elementos es insuficiente y algunas demostraciones presentan suposiciones tácitas.
Para poder corregir estas fallas lógicas tuvieron que pasar más de dos mil años, en donde se sintió la necesidad de un tratamiento postulacional verdaderamente satisfactorio de la geometría euclidiana. Todas las suposiciones encubiertas, o tácitas, tenían que indagarse y había que proponer un conjunto lógicamente aceptable de postulados fundamentales para la materia en forma clara e inequívoca.
Dicha organización de la geometría euclidiana fue realizada primero en 1882 por el matemático alemán Moritz Pasch, su objetivo principal era clarificar los cimientos teóricos de la geometría entendida siempre como ciencia del espacio físico, para esto él hace una distinción entre definición explícita e implícita, mientras que Euclides intentó una clase de definición explícita de los términos punto, recta y plano, en tanto Pasch aceptó éstos como primitivos o irreducibles en su desarrollo de la geometría euclidiana; después Peano en 1889

* El titulo actual de la investigación es “Aspectos relevantes el sistema axiomático de los Elementos de Euclides y sus implicaciones en el aprendizaje de la geometría”.

dio un nuevo desarrollo postulacional de la geometría euclidiana, la obra de Peano es principalmente una traducción del tratado de Pasch en la notación de una lógica simbólica que Peano introdujo al mundo matemático. Posteriormente Mario Pieri, empleó en 1899 en un estudio de la geometría euclidiana un enfoque muy distinto del de sus predecesores ya que él consideró que la materia de su estudio era un agregado de elementos indefinidos llamados "puntos" y un concepto indefinido de "movimiento" al cual propone cinco postulados el cual indican el importante papel asignado al concepto de movimiento. Y el moderno tratamiento postulacional de la geometría euclidiana que ha recibido la aceptación más amplia se debe al eminente matemático alemán David Hilbert, que en 1899 propone bajo el titulo "Grundlagen der geometrie", menciona los cinco grupos de axiomas donde se sustenta la geometría, los cuales son:

- ✓ Axiomas de enlace.
- ✓ Axiomas de orden.
- ✓ Axiomas de paralelismo. (Axiomas de Euclides)
- ✓ Axiomas de congruencia.
- ✓ Axiomas de continuidad. (Axioma de Arquímedes)

Como pudimos observar la organización de los Elementos da fe de precisión conceptual y de refinamiento en la exposición y de la demostración. Aún así, existen muchos presupuestos del trabajo geométrico que no son identificados, porque la actividad del geómetra griego estaba guiada todavía fuertemente por las ideas intuitivas, ligadas a las figuras dibujadas, que desempeñaban un papel central en la demostración. Así por ejemplo, en las primeras proposiciones del Libro 1 las figuras se trasladan o se superponen, una operación que actualmente se introduce por medio de *axiomas de congruencia*. De la misma manera, la existencia de puntos de intersección entre las figuras elementales, la recta y el círculo, se deduce de la observación de la figura que acompaña a la demostración, mientras hoy en día (¡aunque pueda parecer sorprendente!) para garantizar tal existencia se introducen *postulados de continuidad*.

Una etapa que no debemos pasar por alto es donde la geometría sufre un destierro curricular en todos los niveles educativos, y éste en parte se debe a la evolución del tratamiento postulacional ya anteriormente mencionado y además al movimiento que Nicolás Bourbaki produjo al dar a conocer su obra que tiene como titulo *Éléments de mathématique*, en donde la exposición es puramente formal y deja de lado los aspectos que se muestran en los Elementos. Además la obra de Bourbaki tuvo mucha influencia en la forma de abordar y exponer la matemática en los textos y en la enseñanza de los años 1950 y 1960. Esta forma bourbakista de exposición, sólo permite en sus procedimientos partir de axiomas bien explícitamente establecidos, sin apelar en ningún momento a los contenidos intuitivos y prácticos que dan su motivación a las construcciones matemáticas, era considerado el único modo admisible para la exposición matemática y, lo que ha sido más dañino, para la enseñanza misma a todos los niveles, incluida la enseñanza secundaria, y aún en muchos casos, la primaria. Como consecuencia de lo anterior la enseñanza secundaría y primaria fue invadida por la corriente llamada "matemática moderna", con su proliferación de la teoría de conjuntos y con el *destierro de la geometría* de corte más clásico, sustituido por nociones bastante inoperantes y aburridas de álgebra abstracta.

Como se puede observar el desarrollo del tratamiento postulacional de la geometría a representado mucho esfuerzo y tiempo por parte de los matemáticos interesados en esta disciplina, pero cuando esta evolución del tratamiento postulacional es llevado a la escuela posiblemente muchos profesores no le presta la importancia que debiera tener y soslayan esta parte de historia de la geometría, que forma parte de la crisis de fundamentación que tuvo la matemática y de que los estudiantes de matemáticas deben de conocer. Entonces es cuando nos surgen las siguientes interrogantes ¿cuáles serian las implicaciones que se tendría en la enseñanza de la geometría sino se tomara en cuenta esta evolución del tratamiento postulacional? ¿La manera en que se trabaja la geometría en la licenciatura de matemáticas, permite al alumno visualizar y detectar los aspectos relevantes del sistema axiomático deductivo de los Elementos de Euclides? Por lo que en el presente trabajo de investigación tiene por objetivo *analizar los aspectos relevantes en el sistema axiomático de los Elementos de Euclides y sus implicaciones en la enseñanza de la geometría.*

Marco teórico

Al convertir una representación en otra, en el esquema conceptual asociado a un concepto matemático, no siempre hay consistencia y se puede producir situaciones de congruencia o de incongruencias. En el tema de inconsistencia probablemente sepamos muy poco sobre ellas y sobre su rol en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pero es importante reconocerlas en nuestros alumnos para intentar emprender con ellas un camino hacia un pensamiento más consistente en nuestros estudiantes (Garbin, 2005).

Queremos resaltar aquí el trabajo que realizó Tirosh (1990), quién clasificó las ideas inconsistentes y expuso los posibles orígenes de éstas. Tirosh aumenta esta clasificación ofreciendo otros tipos de ideas inconsistentes, de particular importancia para la instrucción:

- *a)* inconsistencias directas e indirectas;
- *b)* validez matemática de las proposiciones;
- *c)* inconsistencias externas e internas;
- *d)* consciencia de los estudiantes de sus inconsistencias.

En particular resulta interesante lo que Tirosh sugiere, y es el de mirar las razones de las inconsistencias en tres áreas diferentes:

LA MENTE

- a) Pueden entrar en conflicto el conocimiento y las creencias.
- b) Puede haber discrepancia entre el aprendizaje formal, intuitivo y el conocimiento algorítmico.
- c) Puede haber discrepancia entre el esquema conceptual y la definición del concepto.
- d) La naturaleza del contexto en que es adquirido el conocimiento puede ser origen de inconsistencias.
- e) La resistencia al cambio conceptual.
- f) La percepción de la matemática que tiene el estudiante.
- g) La compleja relación que existe entre la matemática y el mundo físico.

LA MATEMÁTICA: NATURALEZA RELATIVA

Un alumno puede comprender insuficientemente la naturaleza relativa de la matemática, ya que hay campos de la misma en que un determinado problema no tiene solución mientras que en otros sí. Puede traer como resultado operaciones inconsistentes dentro del sistema en que se esta trabajando.

EL MENSAJE

- a) El lenguaje. La matemática debe ser enseñada, comunicada: por tanto es necesario formar u lenguaje matemático que permita tal actividad.

b) El currículo. La presentación de un tema en el currículo matemático es una causa principal de inconsistencias en la estructura matemática de los estudiantes.
c) Instrucción. Se piensa que probablemente ciertas estrategias didácticas crean más inconsistencias que otras en la mente del estudiante.

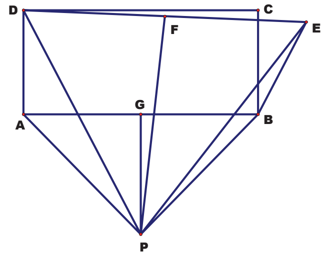
Medios empleados para identificar los aspectos relevantes

Para la exploración de las prácticas de profesores y estudiantes se estructura una situación de aprendizaje, conformada con seis actividades cuatro de ellas son proposiciones[†] de los Elementos de Euclides, la quinta es un ejemplo claro de cuando se realiza una suposición tácita y donde se observa claramente que se contradice un conocimiento ya establecido. La última actividad tiene como propósito observar el sentido que el alumno o el profesor le asigna a la demostración y la utilidad como herramienta para el desarrollo de su vida profesional. A continuación se presentan la actividad uno y la cinco.

1. Analiza el siguiente problema y contesta las preguntas que se hacen al final.

Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.
Sea AB la recta finita dada. Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.
Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo $B\Gamma\Delta$ [Post. 3], y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo $A\Gamma E$ [Post. 3], y a partir del punto Γ donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas $\Gamma A, \Gamma B$ hasta los puntos A, B [Post. 1]. Y puesto que el punto A es el centro del círculo $\Gamma\Delta B$, $A\Gamma$ es igual a AB [Def. 15]; puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo ΓAE, $B\Gamma$ es igual a BA [Def. 15]; pero se ha demostrado que ΓA es igual a AB; por tanto, cada una de las (rectas) ΓA, ΓB es igual a AB. Ahora bien, las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí [N. C. 1]; por tanto, ΓA es también igual a ΓB; luego las tres ΓA, AB, ΓB son iguales entre sí.
Por consiguiente, el triángulo $AB\Gamma$ es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita dada AB. (Que es) lo que había que hacer.

- ¿El problema ya lo habías visto y analizado anteriormente, en que asignaturas? Menciona tu experiencia.
- ¿Qué opinas del problema y su demostración?
- ¿Identificas algún aspecto relevante o especial en este problema? Explícalo.
- Crees que con los datos[‡] que se te presentaron, esta bien justificada la demostración. ¿Por qué?
- ¿Cuáles son las Definiciones, Postulados, Nociones Comunes o Proposición que te garantiza que los círculos se corten?



5. En una experiencia que tuvieron alumnos con su maestro en una clase de geometría se llegó a la conclusión de *que "un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso"* y el profesor le presentaba su demostración.

[†] Las proposiciones (proposición, libro) que utilizamos para esta exploración son: (1, I), (4, I), (29, I), (31, I)
[‡] Los datos que se le dan a los alumnos, son las 23 definiciones, 5 postulados, 8 Nociones comunes y 4 proposiciones, los cuales fueron extraídos de los Elementos de Euclides.

Demostración
Sea ABCD un rectángulo. Trácese la recta BE exterior al rectángulo y de longitud igual a BC y, por tanto, a AD. Trácense las mediatrices de DE y AB; como son perpendiculares a rectas no paralelas, deben cortarse en un punto, P. Trácense AP, BP, DP, EP. Entonces, PA = PB y PD = PE (un punto de la mediatriz de un segmento recto equidista de los extremos de éste). Además, por construcción, AD = BE. Por consiguiente, los triángulos APD y BPE son congruentes, puesto que los tres lados de uno son iguales a los tres del otro. De aquí que el ángulo DAP=ángulo EBP. Pero el ángulo BAP = ángulo ABP, puesto que estos ángulos son los ángulos en la base del triángulo isósceles ABP. Por sustracción se deduce ahora que el ángulo recto DAB = ángulo obtuso EBA.

- ¿Cuáles son los teoremas o proposiciones que se utilizan en esta demostración?
- ¿Identificas el error de la demostración? Explícala.
- ¿Cuáles son los datos que hacen que exista un error en la demostración?
- ¿Cuáles son los teoremas o proposiciones que crees que deberían usarse en esta demostración?

Algunos resultados

Como se mencionó al principio esta es una investigación que se encuentra en proceso, sin embargo ya se han realizado experimentaciones con alumnos del quinto semestre de licenciatura en matemáticas (área matemática educativa), en la cual participaron 17 estudiantes. A continuación presentamos los resultados obtenidos de la primera actividad, en donde el aspecto relevante a detectar es una suposición tácita que hay en la demostración y éste se debe a que en los datos no existe ningún postulado, definición y nociones comunes que garantice que los círculos se corten. Para poder observar que si los alumnos detectan este aspecto nos basamos en las dos últimas preguntas que en el apartado anterior mencionamos; los resultados fueron los siguientes:

- ➢ Ocho alumnos mencionaron que la demostración estaba bien justificada, porque cada argumentación estaba sustentada por las definiciones, postulados y nociones comunes.
- ➢ Cinco alumnos dijeron que la demostración no estaba bien justificada, las explicaciones que ellos dieron fueron las siguientes:
  - Porque no se explica en la demostración el por qué el triángulo resultante es equilátero.
  - Dos alumnos mencionan que faltan datos para que la demostración sea correcta, pero no proponen cuales deberían ser estos.
  - Mencionan que la utilización de variables (letras griegas) los confundían.
  - Uno menciona que falta decir por qué se intersecan las circunferencias en dos puntos.
- ➢ Cuatro alumnos no respondieron

Con respecto a la última pregunta del por qué los círculos se cortan, las respuestas fueron las siguientes:

- ➢ De acuerdo a los datos las definiciones 8, 10, 15 y 17; los postulados 1 y 3; la noción común 1, son las argumentaciones más utilizadas seis alumnos para garantizar dicha intersección.

- Seis alumnos no respondieron.
- Dos mencionan que ninguna definición, postulado y noción común que vienen en los datos garantiza dicha intersección.
- Los tres restantes mencionan lo siguiente:
  - Argumenta, puesto que el diámetro de cada círculo que se encuentra sobre la misma recta definida por dos puntos, es mayor que la distancia entre esos dos puntos.
  - Ya que ambas circunferencia tienen el mismo radio en común.
  - No conozco que haya una definición, postulado o Noción común que garantice esto, pero repito todo depende de la distancia del segmento y utilizar cada extremo del segmento para trazar los círculos y recomendar que el radio de estos círculos sea más grande que el punto medio de este segmento, o la suma de los dos radios sea igual o mayor que el segmento.

Como podemos observar la mayoría de los alumnos no detectan la suposición tácita que se hace en la demostración. Porque de los cinco que mencionan que la demostración no esta bien justificada, solo uno aclara que hace falta la intersección de los círculos, pero al pasar a la siguiente pregunta que dice ¿Cuáles son las Definiciones, Postulados, Nociones Comunes o Proposición que te garantiza que los círculos se corten? Este se contradice porque el garantiza esta intersección con el postulado 3. Por otra parte queremos resaltar, que en esta misma pregunta un alumno enuncia lo que es un teorema para la continuidad en circunferencias, el cual dice "Sean ω_1 y ω_2 circunferencias contenidas en un mismo plano, de centros respectivos O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 (con $r_1 \leq r_2$). Entonces:

- Si $r_2 - r_1 < \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} < r_1 + r_2$ entonces ω_1 y ω_2 tienen dos puntos en común
- Si $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} = r_1 + r_2$ entonces ω_1 y ω_2 tienen un único punto en común, al igual que sus círculos, …"

Además pensamos aplicar estas actividades a grupos de primer año de la licenciatura en matemáticas el cual se encuentran en el curso de Geometría plana y trigonometría, para poder observar si el contexto en que es adquirido el conocimiento puede ser origen de inconsistencias o no.

Referencias bibliográficas

Euclides (1991). *Elementos de Euclides*. Madrid, España: Gredos.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. D.F. México: UTEHA.

Ferreirós, J. (2004). Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904. *La Gaceta de la RSME*, Vol.7.2, Págs. 449-467.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime Vol. 8, Núm. 2, pp. 169-193.

Hernández, L. (2001). Sobre los principios fundamentales de la geometría comentarios sobre los Elementos. Disponible en: http://www.euclides.org/menu/articles/aarticle1.htm

Kline, M. (1972). El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días tomo 1. Madrid, España: Alianza Editorial.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 12, 111-129.