View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

DIFICULTADES EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNOS CONCEPTOS EN ÁLGEBRA LINEAL

Carlos Oropeza L., Javier Lezama A.
UNAM, CICATA-I.P.N. (México)
carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com

Campo de investigación: pensamiento matemático avanzado, Nivel educativo: superior
Palabras clave: dependencia lineal, independencia lineal, representaciones geométricas

Resumen
En esta exploración se reportan algunas dificultades relacionadas con la interpretación geométrica de los polinomios de segundo grado en el concepto de dependencia e independencia lineal. La naturaleza abstracta de la asignatura de Álgebra Lineal, provoca dificultades en el entendimiento de los conceptos que ésta aborda y como una cuestión importante ligada a la percepción espacial que no sólo se reduce a la geometría, se trata de la visualización en matemáticas. En este trabajo se presenta propuesta una alternativa para que los estudiantes puedan hacer uso de las representaciones geométricas con la intención de aportar ciertos rasgos de claridad en el entendimiento del concepto referido, una vez que se acepte usar el isomorfismo para representar las funciones polinomiales de orden n como una representación de vectores en el espacio R^{n+1} .

Introducción

La Matemática Educativa se ha ocupado del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza en el nivel universitario por más de 30 años. Ha intentado mejorar nuestra comprensión de las dificultades que los alumnos encuentran al aprender matemáticas y las disfunciones del sistema didáctico; también ha intentado encontrar vías que permitan superar tales dificultades. La enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en las carreras ingeniería presentan múltiples dificultades, razón por la cual se han promovido reflexiones profundas en torno a la búsqueda de presentaciones diferentes del tema en cuestión. Es común que en la enseñanza convencional del álgebra lineal, la mayor parte de conceptos se presentan como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. Los problemas asociados se resuelven usando la definición formal junto con argumentos derivados de la lógica. Esto hace que muchos estudiantes perciban que la materia es demasiado abstracta y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en la realidad.
Los orígenes teóricos del estudio, sobre los que se basa este documento, consisten en la comprensión de que una reforma educativa referente a la enseñanza de las matemáticas no puede tener lugar en ausencia de una noción de los procesos de pensamiento del alumno. Aunado a la reconocida complejidad intrínseca de las matemáticas, aparece la dimensión cognoscitiva de la didáctica que es particularmente relevante (Balacheff, 1990). Entre los problemas relativos al aprendizaje del álgebra lineal, están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto como por ejemplo el cero que puede representar un vector, un escalar o un espacio vectorial, y que los libros de texto hacen uso indistinto de estas diferentes formas de interpretación; y para las cuales no resulta muy claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. O bien, como señala Sierpinska (1996) el alumno se encuentra, entonces, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales.

Una posición pragmática a seguir podría ser la de que no se usen varias representaciones de un objeto matemático, pero, como lo señala Duval (1993): *...las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias. En efecto, los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción, o por la experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados "reales" o "físicos"* (pág.38). Las representaciones semióticas juegan un papel fundamental en la actividad matemática. Continuando con estas ideas, tenemos en consecuencia que la aprensión de los objetos matemáticos y obliga a la interacción de diferentes representaciones semióticas.
Hemos dividido el presente trabajo en dos partes, la primera relativa a las dificultades que hay en la articulación de diferentes sistemas semióticos de representación del concepto de función. La segunda trata sobre errores en el uso de tales sistemas y repercusiones en la enseñanza, a través de análisis de casos. En lo que sigue utilizaremos el sistema semiótico de representación en el sentido que lo utiliza Duval.
Suponemos que el aprendizaje no es visto como aislado en un vació cognoscitivo, sino dentro de un contexto sociocultural (Vygotsky, 1962); por lo tanto, en una visión constructivista del pensamiento (Von Glasersfeld, 1987) la cognición del que aprende, mientras sea personal y de interés individual, es también vista enfáticamente como que tiene lugar en un ambiente de aprendizaje. Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una formula algebraica, una grafica son representaciones semióticas que pertenecen a sistemas semióticos diferentes. Generalmente, se considera a las representaciones semióticas como un simple medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación, es decir, para volverlas visibles o accesibles a otros. Ahora bien, este punto de vista es engañoso. Las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, si no que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.
A partir de lo dicho anteriormente nos proponemos explorar:

- El uso de las representaciones geométricas con la intención de que los estudiantes puedan incorporarlas en la comprensión del tema en estudio.
- La noción que tienen los estudiantes del concepto de dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado expresados como espacios vectoriales.

Contenido de la experiencia

Definición: Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2,.....,v_k\}$ de un espacio vectorial V es LINEALMENTE DEPENDIENTE si existen escalares $c_1, c_2....,c_k$, al menos uno de los cuales no sea 0, tales que:
$c_1v_1 + c_2v_2+.....+ c_kv_k = 0$
Un conjunto de vectores que no es linealmente dependiente se dice que es LINEALMENTE INDEPENDIENTE. (Grossman, 2005).
Por otra parte, centramos nuestra atención en el hecho de que se puede establecer un isomorfismo, entre el conjunto de polinomios P_n con el espacio vectorial R^{n+1}, este hecho requirió de estudio en cuanto a la definición formal de esta idea. A continuación se muestran las conclusiones del establecimiento de dicha idea:

Como $f : ax^2 + bx + c \to [a,b,c]$ es lineal y biyectiva, se deduce que $\boldsymbol{f : P_n \to R^{n+1}}$ es isomorfa y entonces se dice que los espacios vectoriales $\boldsymbol{P_n}$ y $\boldsymbol{R^{n+1}}$ son isomorfos.

Tomando como fundamento la consideración anterior se construyó una experiencia en la cual el punto central consiste en manipular una serie de polinomios de segundo grado, parte de la puesta en escena de la actividad puede apreciarse en las siguientes dos figuras.
En la primera de ellas, se puede apreciar que el grupo de estudiantes reportan una tendencia por relacionar los puntos de intersección entre las parábolas analizadas y el concepto de dependencia e independencia lineal de las mismas. También se puede apreciar que esta idea los conduce a plantear otros sistemas distintos, en donde en particular este equipo de estudiantes hace la propuesta de un conjunto de polinomios que los conduce en su solución a una inconsistencia a la cual no pudieron darle una interpretación en su significado.

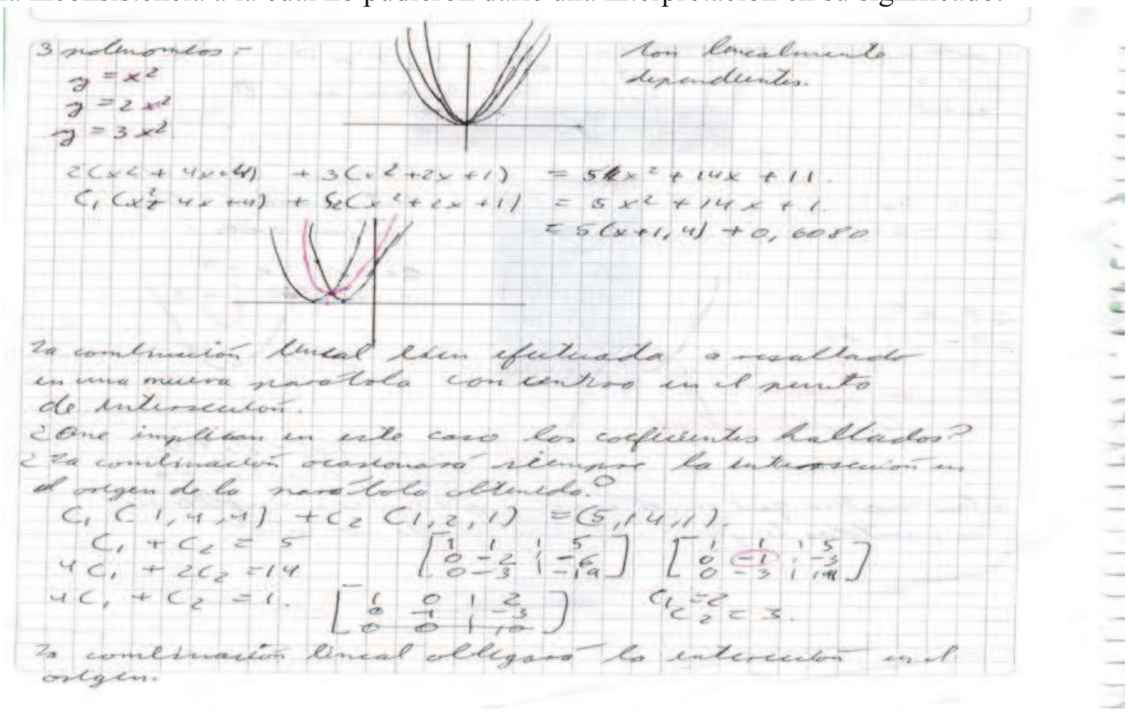


Figura 1

En la segunda figura, podemos apreciar como el grupo de estudiantes (del mismo equipo), inicia una extensión de su idea inicial que proponen como interpretación geométrica de los polinomios de segundo grado, misma que tiene que ver con las intersecciones de las parábolas que grafican. Cabe precisar que se mantienen en esa idea hasta la parte de retroalimentación de la actividad, a pesar de que en su reporte (figura 2) se encuentran indicios del rompimiento de esta idea tal como se puede observar en la última de la gráficas que dibujan y que justamente se alcanza en el momento de la exposición del material por parte de los equipos.

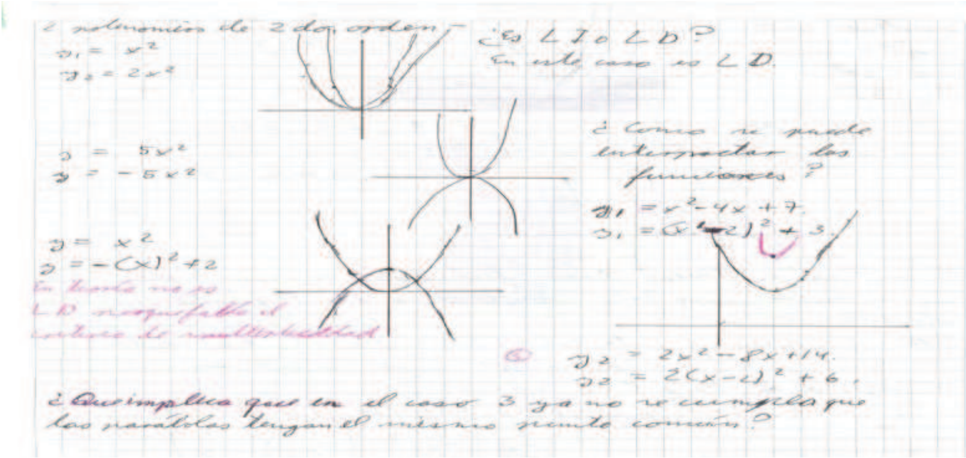


Figura 2

El diseño de las actividades ha experimentado ciertas modificaciones, tal es el caso de la utilización del software matemático usado como instrumento verificador de resultados. Una pequeña muestra de ello se presenta a continuación.

Los siguientes ejemplos han sido resueltos con la ayuda de las librerías de Maple versión 9.5. Se tienen dos polinomios $x^2 - 2x - 3$ y $-x^2 + 6x - 9$ en los cuales se debe determinar si son linealmente dependientes o independientes.

>restart:with(linalg):

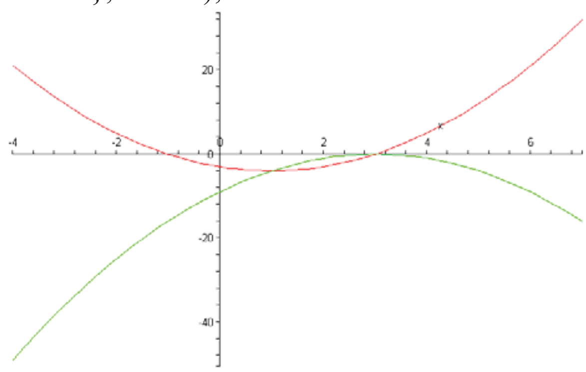
- a:=<<1,-2,-3>|<-1, 6,-9>>:
- sol:=<<0,0,0>>:
- gaussjord(<a|sol>);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sintaxis de Maple

En el resultado obtenido se observa que el conjunto de polinomios son linealmente independientes, ya que en la solución del sistema de ecuaciones los escalares son igual a cero. En su gráfica correspondiente se puede apreciar que a pesar de que las parábolas comparten una raíz son linealmente independientes.

>plot({x^2-2*x-3,-x^2+6*x-9},x=-4..7);



Ahora se presenta un segundo ejemplo analizado, en el cual se hace uso del isomorfismo. La actividad consiste en estudiar tres polinomios de segundo grado linealmente dependientes: $-2x^2+x$, x^2-4x, $8x^2-7x$.

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b := [0,\ 0,\ 0] \qquad soluciones = \left[\frac{25}{7}\_t_1,\ \frac{6}{7}\_t_1,\ \_t_1\right]$$

Estableciendo los polinomios de estudio $-2x^2+x$, x^2-4x, $8x^2-7x$ como vectores, se tiene:

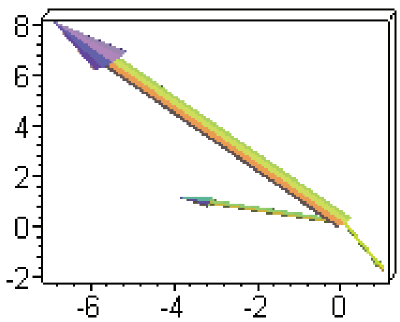
- V_1:=<0, 1,-2>;
- V_2:=<0,-4,1>;
- V_3:=<0,-7,8>;

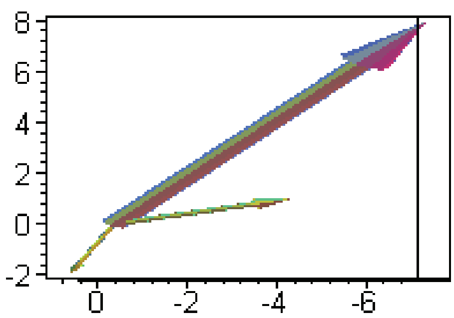
$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

De la ecuación de la forma general obtenemos que: $c_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$c_1 = \frac{25}{7} \qquad c_2 = -\frac{6}{7} \qquad c_3 = 0$$





Como podemos observar los vectores se encuentran contenidos en un plano y por tanto en R^3 son linealmente dependientes. También podemos observar, que los resultados obtenidos son los mismos, es decir, que en este apartado puede ayudar a identificar la equivalencia que se establece al hacer uso de un análisis polinomial con respecto a usar un análisis vectorial en tercera dimensión.

Conclusiones

Algunas de las reflexiones que nos ha proporcionado la puesta en escena de las actividades mostradas son las siguientes:
La mayoría de los equipos participantes aceptan con naturalidad y con poca dificultad trabajar en el ambiente geométrico ya que según sus comentarios, afirman que el manejo gráfico de las parábolas lo han utilizado en varios cursos previos a la experiencia.

La actividad provoca el rompimiento de la idea inicial de los estudiantes en relación al concepto de la dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado, la cual interpretan como intersección o no de las raíces en las graficas de las parábolas que se analizan.
El uso de la representación como vectores libres en el plano tridimensional de los polinomios de segundo grado (en algunos grupos de trabajo), provoca conflicto para interpretar la dependencia e independencia lineal; esto se debe a la poca práctica que algunos estudiantes tienen en el manejo de representaciones en tres dimensiones. Sin embargo, para los equipos que sí cuentan con experiencia suficiente para graficar vectores en tercera dimensión, este hecho les permite trabajar con menor dificultad.
Hacer uso del isomorfismo entre los polinomios de segundo grado y los vectores en el espacio R^3, podría proporcionar una estrategia que favorezca el entendimiento del concepto de la dependencia e independencia lineal.
El reconocimiento de utilizar el software matemático como un instrumento verificador de resultados tanto analíticos como geométricos, sólo provoca en algunos grupos de estudiantes la inquietud por extender su estudio a un mayor número de ejemplos.

Referencias bibliograficas

Balacheff, N. (1990). Perspectivas futuras para la investigacion en la psicología de la educación en matemáticas. En el Grupo Internacional Kilpatrick J., Nesher P., para la psicología de la educación en matemáticas. *Matemáticas y Cognición: Una síntesis de investigacion por le Grupo Internacional para la psicología de la educación en matemáticas.* Capítulo 7, págs.135-148. Cambridge University Press, Reino Unido.

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: I’ Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, págs. 235-253.

Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal*. D.F., México: Mc Graw-Hill.

Piaget J. (1968). *La formation du symbole chez I’ enfant*. Nauchâtel, Delachaux & Niestlè.

Sierpinska, A. (1996). Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra. *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, Central Michigan University.

Vigotsky, L. (1962). *Thought and Lenguaje* (Traducción de Hanfmann y Vakar). Cambridge: M.I.T. Press.

Von Glasersfeld, E. (1987). Aprendizaje como una actividad constructiva. C. Janvier (Ed.) *Problemas en la representación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.