CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS HINDU-ARABES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Angélica María Martínez, Mario Arrieche
Universidad Pedagógica Experimental Libertador Venezuela
angelicmar5@yahoo.es; marioarrieche@hotmail.com
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Medio

Resumen. *Presentamos un breve recuento de la evolución histórica de la ecuación de segundo grado durante los siglos VII al XIII d.C., época en la que se destacan diversos aportes a la Matemática por parte de la civilización Hindú y Árabe. El trabajo pretende destacar cómo se concibieron distintas explicaciones entorno a dicha ecuación a modo de clarificar aspectos didácticos que contribuyan en el proceso de su enseñanza-aprendizaje en Educación Media. Bajo el análisis de las configuraciones epistémicas (Godino, Batanero y Font, 2008) y utilizando una metodología cualitativa, se realiza una revisión documental para concluir las situaciones-problema, técnicas, lenguajes, notaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego durante este período de la humanidad, y cómo pueden trabajarse en el aula.*
Palabras clave: ecuación de segundo grado, configuración epistémica, cultura hindú-árabe

Introducción

Por la importancia que tiene la enseñanza y aprendizaje de la ecuación de segundo grado en la educación básica, es de interés establecer posibles alternativas de tipo didáctico para su enseñanza; de esta necesidad, surge el presente informe bajo la perspectiva epistemológica, inmerso en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2008). Es así, como se tiene para este trabajo el propósito de mostrar brevemente el análisis de las configuraciones epistémicas realizadas en torno a la ecuación de segundo grado durante los siglos VII al XIII d.C. En esa época se destaca la civilización Hindú-Árabe, portadora de diversos avances en el ámbito matemático y de la cual se puede destacar su trabajo con la ecuación de segundo grado.

La relevancia de un estudio epistemológico e histórico dentro de un trabajo investigativo de tipo didáctico es tenida en cuenta por muchos investigadores en Didáctica de la Matemática, tal es el caso de Artigue (1990), quien habla de los alcances del análisis epistemológico; o el caso de González (1991) que refiere los aportes específicos del conocimiento de la historia a la práctica docente; o por ejemplo Sierpinska & Lerman (1996), quienes junto con Gascón (1999) han analizado la relación entre epistemología, matemática y educación; o también Godino (2003) quien ve su implicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje; por citar algunos.

Ahondando lo anterior, el análisis histórico de las matemáticas, interpretado desde un punto de vista epistemológico, posibilita recabar información sobre los sistemas de prácticas utilizados para solucionar situaciones-problemas, en relación a marcos institucionales específicos, pero a su vez puede sustentar el tipo de técnicas, los lenguajes, las notaciones, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, puestas en juego en cada momento y circunstancia. Es más, según Godino y Font (2007) la forma como estos aspectos se relacionan originan las configuraciones epistémicas; entendidas, como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas institucionales. Con el estudio de estas configuraciones epistémicas y de las entidades primarias, se puede concretar el significado de un objeto o noción matemática estudiada y tomar decisiones de tipo instructivo o curricular eficaces para la selección de los sistemas de prácticas matemáticas que mejor se adapten a un proyecto educativo.

Gracias a esto y para dar contexto al presente informe, se realizó un estudio documental a través de la revisión y lectura de diversas fuentes, entre ellas tesis doctorales, libros de filosofía de la matemática, artículos de revistas de Educación Matemática relacionadas con el tema; para precisar el desarrollo de la ecuación de segundo grado, destacar la problemática, los métodos, los argumentos y las diferentes maneras de concebir esta ecuación durante la civilización Hindú-Árabe, a modo de reconstruir aspectos que pueden ser herramienta didáctica en el proceso de su enseñanza-aprendizaje.

Se muestra a continuación, en forma sucinta, tres apartados: Configuraciones Epistémicas de la ecuación de segundo grado, Conclusiones generales a nivel didáctico y Referencias Bibliográficas.

Configuraciones epistémicas y desarrollo histórico

Es de notar que en todo el proceso histórico en el cual se va configurando la ecuación de segundo grado, tanto el simbolismo como el trabajo de algunos personajes influyeron notoriamente para que la noción de ecuaciones en general evolucionara. Por esto, a lo largo de la historia ha sido diferente la manera de concebir la ecuación de segundo grado y más aún, difiere de cómo hoy en día la vemos. Sin embargo, las nociones cuadráticas han estado presentes en diferentes períodos históricos de las Matemáticas.

Para detallar uno de estos períodos, se tomará en el presente trabajo la evolución de la ecuación cuadrática durante la civilización Hindú-Árabe, desarrollada entre los siglos VII al XIII d.C, analizando las entidades primarias: lenguaje, situaciones problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Evolución de la Ecuación de Segundo Grado

En el año 1.020, de acuerdo a Franco (1964) el matemático Sriahara, inventó el "método hindú" para resolver la ecuación de la forma $ax^2 + bx = c$, este método consistía en multiplicar los dos miembros de la ecuación por 4 veces el coeficiente de x al cuadrado, luego se agrega el cuadrado del coeficiente de x a ambos miembros y finalmente se extraía la raíz cuadrada.

Ribnikov (1987) comenta que la mayoría de los trabajos matemáticos de la cultura hindú, quedaron plasmados en los libros: Sutras y Vedas. En estos libros se manifiesta el uso del teorema de Pitágoras, métodos de cuadratura de círculos, operaciones numéricas, trabajos geométricos, etc., relacionados con problemas que vinculaban la arquitectura, la economía, la producción, entre otros.

Diversos aspectos señalados por Orellana (1996), indican que los hindúes usaron en un inicio el lenguaje retórico pero luego pasaron al sincopado (sincopar viene de abreviar) y en su mayoría las obras terminaron escritas en lenguaje poético y metafórico, planteando problemas de interés matemático. Un ejemplo es el siguiente problema, mencionado por Perelman (1959), narrado en forma de verso y que conlleva una ecuación cuadrática:

"Regocíjanse los monos

divididos en dos bandos:

su octava parte al cuadrado

en el bosque se solaza.

Con alegres gritos, doce

atronando en el campo están.

¿Sabes cuántos monos hay

en la manada, en total?" (pag. 129)

Orellana (1996) también expresa cómo los árabes toman los conocimientos de los griegos y de la cultura hindú, para retransmitirlos y ampliarlos durante sus conquistas territoriales, influyendo culturalmente en la India, Irán, Asia Menor y gran parte de Europa.

Luque, Mora y Torres (2004) al citar al árabe Tabit Ben Qurra expresan que: "*representó geométricamente el polinomio* $x^2 + 3x + 2$ *como un producto de factores, así:* x^2 *como el área de un cuadrado de lado x, a 3x como tres rectángulos cada uno de dimensiones x y 1; y a 2 por dos cuadrados de lado 1*" (pag. 212); esto se muestra en la figura 1.

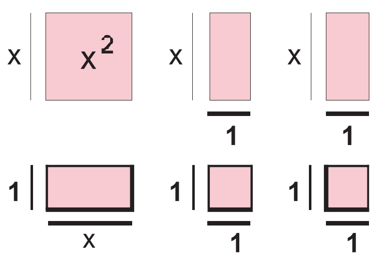

Figura 1

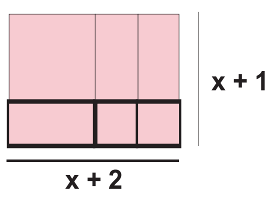

Figura 2

Ahora, lo interesante es que la suma de estas áreas equivale a un producto notable, el cual se deduce al formar un rectángulo con todas la áreas antes descritas y por lo tanto llegamos a la conclusión de que el polinomio dado equivale a la forma: (x + 1).(x + 2), tal como se ve en la figura 2.

Otro árabe, Al-Tusi (s. XII d.C.) usó ecuaciones de grado menor o igual a tres, y hasta introdujo nociones de análisis local para hallar el máximo de una función a través de la solución de una ecuación (Malisani, 1999). En general, los árabes logran aportar mucho al álgebra por la correspondencia que establecen entre ésta y la geometría para la solución de ecuaciones. Llegaron a transformar las igualdades por los principios fundamentales de "al-jabr" y "wa'l-muqabala" que significan reducción y cancelación, dados por Al-Khwarismi (750-850 d.C.) y quien según Cadenas

(2004) pudo solucionar ecuaciones de segundo grado usando la completación de cuadrados, tal como se ve en las figs. 3, 4 y 5, referentes a los casos que él denominaba: cuadrados y raíces iguales a números (actualmente de la forma $x^2 + bx = c$); cuadrados y números iguales a raíces (es decir, $x^2 + c = bx$); raíces y números iguales a cuadrados (en otras palabras de la forma $bx + c = x^2$).

Un ejemplo, es el caso de resolver la ecuación $x^2 + 6x = 7$, para lo cual realiza el siguiente procedimiento, y cuya construcción se ve con ayuda de la fig. 6:

1.- Se comienza por construir el cuadrado de lado x, ABCD, cuya área es x^2.

2.- Luego se prolongan los lados AB y AD en 3 unidades respectivamente (obteniéndose dos rectángulos de área 6x, que serán el segundo término de la ecuación).

3.- Se completa el cuadrado construyendo un nuevo cuadrado de superficie 9 u^2.

4.- Puede verse que el área total del cuadrado es $x^2 + 6x + 9$, y por esto, para resolver la ecuación $x^2 + 6x = 7$, se le suma 9 a ambos miembros, quedando $x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 = 16$, lo cual es a su vez $(x + 3)^2 = 4^2$, quedando $x + 3 = 4$ (considerando la raíz positiva por tratarse de distancia), y por lo tanto $x = 1$.

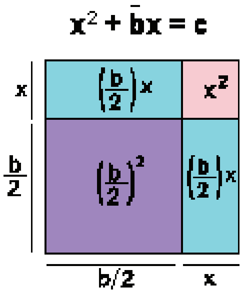

Figura 1

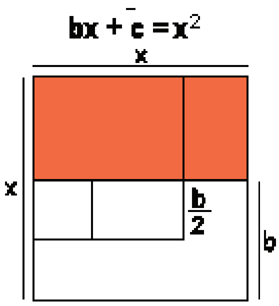

Figura 2

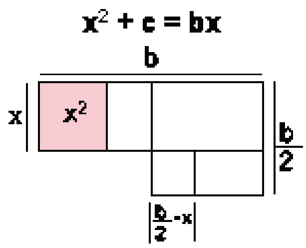

Figura 3

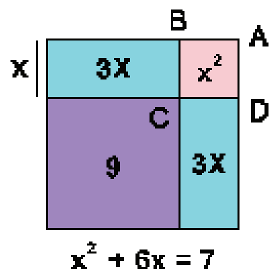

Figura 4

Elementos Primarios y Configuraciones Epistémicas

A través del anterior recorrido, donde se perciben aspectos históricos y epistemológicos, se pueden extraer conclusiones generales de cómo evolucionó la ecuación de segundo grado; pero más interesante resulta esbozar estas conclusiones partiendo del enfoque teórico en el cual se basa nuestro estudio. Según el enfoque onto-semiótico (EOS) de la cognición matemática, es de interés el análisis de la historia de las matemáticas, interpretada desde un punto de vista epistemológico, pues permite recabar información sobre los sistemas de prácticas, definidas como: *"toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas"* (Godino y Batanero, 1994, p. 334), puestas en juego para solucionar situaciones-problemas.

Las situaciones-problema, se refieren a *"situaciones y aplicaciones extramatemática e intramatemáticas que inducen la actividad matemática y a partir de las cuales han emergido los conceptos y teorías"* (Godino, 2003, p. 88). Es más, según Godino y Cols. (2008), un estudio epistemológico no llega solo hasta aquí, sino que también puede llevar al análisis de la tipología de los objetos primarios, con lo cual se puede describir la actividad matemática y los productos resultantes de la misma, y para esto considera a dichos objetos primarios en: *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, etc.), *Situacionales-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.), *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.), *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos...), *Procedimientos* (algoritmos, técnicas de cálculo...), Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo...).

Según lo anterior, se puede ver que se presentó un uso de lenguaje entre retórico y sincopado; las situaciones problema iban acorde con las necesidades propias de las comunidades, a nivel de construcción, comercio, etc., pero comienza un interés por temas meramente matemáticos. También, entre los conceptos matemáticos usados en este período, se tiene que no se aceptaban los números negativos, ni como coeficientes de las ecuaciones, ni como raíces, muy a pesar de que, algunos matemáticos antiguos de la India, como Brahmagupta si conocían las raíces negativas y tal como lo expresan Luque y Cols. (2004) no se trabaja con ellas en lugares fuera de la China o la India, mientras que otros conceptos como recta, cuadrados, insertar, reducir; etc., si fueron usados. De las proposiciones y los procedimientos se podría decir que están el método hindú y la completación de cuadrados. Mientras que los argumentos empleados fueron al inicio la transmisión de técnicas específicas según el caso particular a resolver y luego se extendió a casos más genéricos aplicando razonamiento deductivo y geométrico.

En general, el paso por estas culturas ayuda a develar cómo el trabajo con la ecuación cuadrática fue de utilidad para aspectos socio-comerciales de la época, para el progreso intelectual-científico y las implicaciones geométrico-matemáticas desarrolladas, en consonancia con los recursos del momento.

Veamos en el siguiente cuadro una síntesis de lo analizado:

Cuadro A. Red de Entidades Primarias vs. Período histórico

Entidades Primarias / Períodos histórico	Lenguaje	Situa-prob.	Conceptos	Proposici.	Procedi.	Argument.
India (S. VII dC)	Retórico y Sincopado	Situaciones geométrica-necesidades	-números negativos -recta, rectan.	La ec. de la forma $ax^2 + bx = c$ se multiplicar 4 veces por el coeficiente de x al cuadrado…	Introducción abreviaturas y mét. Indú	Se transmite la técnica a caso particular
Arabia (S. VIII dC)	Retórico Sincopado	Situaciones geométrica-necesidades	-recta, rectan. cuadrados Insertar-reducir	Resuelven $x^2 + bx = c$ $x^2 + c = bx$ $bx + c = x^2$ por completación de cuadrados.	Completación de cuadrados Despeje de variable	Se transmite la técnica a casos generales Razonamiento deductivo

Conclusiones generales de tipo didáctico

Por lo general en la enseñanza del álgebra predomina la manipulación de símbolos de acuerdo a reglas preestablecidas, pero puede hacerse más uso del trabajo geométrico, o de las diversas técnicas que acá se expusieron, en el momento de la enseñanza de la ecuación de segundo grado, a modo de favorecer la comprensión por parte del alumno de este concepto, ya que encuentra una nueva forma de resolverla y representarla.

A través del análisis epistemológico, se puede tener una visión más global del lenguaje, los problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que han entretejido el surgimiento de este objeto matemático, con el fin de precisar su origen y rescatar su importancia tanto en el contexto matemático como en el educativo, sobre todo se ha podido constatar lo enriquecedor de este período histórico en el aspecto geométrico al momento de resolver una ecuación de segundo grado.

Tal como sucedió en la historia y basándonos en la solución de problemas, se podrían considerar ciertas etapas para superar los grados de dificultad en el aprendizaje de la ecuación de segundo grado. Se podría pasar:

1º De lo sencillo, formulando problemas que involucren ecuaciones de segundo grado incompletas con sus múltiples variantes y con coeficiente 1 para la variable al cuadrado.

2º Luego, formular situaciones en las que el alumno agregue términos para que un binomio se convierta en trinomio cuadrado perfecto.

3º Planteando problemas con ecuaciones de segundo grado completas que requieran el uso de los métodos de Al-Kwarizmi, los cuales en el fondo pretenden analizar como convertir la ecuación emergente en trinomio cuadrado perfecto (o hacer variantes con el método de Sriahara).

4º Pasar luego, a realizar la construcción gráfica de los anteriores problemas, para darles conexión entre el álgebra y la geometría.

5º Solucionar ecuaciones de segundo grado por factorización y así profundizar en la descomposición en factores de la ecuación dada.

6º Llegar a los casos donde la ecuación de segundo grado contenga un número distinto de 1 en la variable al cuadrado, lo cual llevará a su resolución con la fórmula general.

7º Por último, llegar a la enseñanza de las manipulaciones operativas de carácter literal, para solucionar las ecuaciones de segundo grado completas, con diversas aplicaciones.

Finalmente, estas conclusiones son apenas un pequeño aporte, sólo al momento de establecer contacto de este tema con los alumnos es que podemos establecer otras estrategias. Lo importante es que a través de este rescate histórico-epistemológico del desarrollo de la ecuación cuadrática, podemos vislumbrar cuan importante es la enseñanza de ésta y posibilitar otras maneras para enseñar este objeto matemático y convertirlo en un tema más accesible a nuestros alumnos.

Referencias bibliograficas

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10* (2/3), 241-286.

Cadenas, R. (2004, Noviembre). *La ecuación de segundo grado. Un estudio Histórico - Didáctico*. V Congreso Venezolano de Educación Matemática. Instituto Pedagógico de Barquisimeto "Luis Beltrán Pietro Figueroa", Barquisimeto, Venezuela.

Franco, R., (1964). *Didáctica del álgebra, la geometría y la trigonometría*. Medellín, Colombia: Bedout

Gascón, J. (1999). *Epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática. Posición de la Didáctica Fundamental*. XIII SI-IDM. Madrid, España.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355

Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Recuperado el 10 de marzo de 2007, de http://www.ugr.es/local/jgodino/ indice_eos.htm

Godino, J. D., y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos*. Recuperado el 10 de abril de 2007, de http://www.ugr.es/local/ jgodino/indice_eos. htm

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado el 8 de junio de 2008, de http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

González, U. (1991). Historia de la Matemática: Integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. 9(3), 281-289

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2004). *Algebra Antigua.* XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, visión histórica. *Revista IRICE*. *13*, 105-132

Orellana, M. (1996). *Historia de la Matemática*. (2ª ed.). Caracas, Venezuela: Autor.

Perelman, Y. (1959). *Algebra Recreativa*. Moscú: Ediciones en lenguas extranjeras.

Ribnikov, K. (1974). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). *Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática* (J. D. Godino, Trad.). En: Bishop, A. J., et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876.