ANÁLISIS DEL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA ESPACIAL EN UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA 3-DIMENSIONAL

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime

El creciente uso de software de geometría dinámica 3-dimensional plantea nuevas cuestiones a los investigadores en Educación Matemática. Para aportar información sobre el aprendizaje de geometría espacial en esta disciplina mediante entornos de geometría dinámica 3-dimensional, y sobre posibles fortalezas y debilidades de tales entornos, presentamos resultados de una investigación experimental en la que se analiza cómo un estudiante de altas capacidades matemáticas aprende conceptos relativos a paralelismo entre rectas y/o planos en el espacio mediante la resolución de actividades en un entorno de Cabri 3d.

Términos clave: Estudiantes con talento matemático; Geometría espacial; Procesos de aprendizaje; Programa de geometría dinámica; Razonamiento matemático

Analysis of Space Geometry Learning in a 3-dimensional Dynamic Geometry Environment

The increasing use of 3-dimensional dynamic geometry software raises new questions to researchers in mathematics education. To contribute information about the learning of space geometry in Secondary School based on 3-dimensional dynamic geometry software environments, and about possible strengths and weaknesses of such environments, we present results from a teaching experiment designed to analyze a gifted student's learning of concepts relative to parallelism between straight lines and/or planes in the space based on solving activities in a Cabri 3d environment.

Keywords: Dynamic geometry software; Gifted students; Learning processes; Mathematical reasoning; Space geometry

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9*(2), 53-83.

La conocida escasez de contenidos de geometría en los currículos españoles de educación primaria y educación secundaria se acentúa en lo referente a los contenidos de geometría espacial. Hay datos internacionales, por ejemplo resultados de las pruebas TIMSS, que correlacionan estrechamente el conocimiento de contenidos de geometría con el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático de orden superior como son el razonamiento proporcional, el razonamiento visual o el razonamiento deductivo, y con el aprendizaje de otras áreas de las matemáticas en las que la geometría facilita la representación de conceptos y relaciones (David y Tomaz, 2012; Tatsuoka, Corter y Tatsuoka, 2004).

En las últimas décadas, se está produciendo un tímido aumento del reconocimiento de la importancia de la geometría para lograr una adecuada formación matemática de los estudiantes por parte de los profesores de matemáticas (David y Tomaz, 2012). Este reconocimiento se apoya en la disponibilidad de nuevas herramientas, los programas informáticos de geometría dinámica que, junto a los materiales didácticos tradicionales, permiten organizar entornos de enseñanza más interesantes y activos, en los que los estudiantes pueden realizar exploraciones y experimentos a partir de los cuales generar nuevos conocimientos.

En cuanto a la geometría espacial, la reciente aparición de diversos programas de geometría dinámica 3-dimensional y el mayor uso de los ordenadores en los centros de educación primaria y educación secundaria pueden ayudar a superar los inconvenientes para enseñar geometría espacial derivados de la escasez de materiales manipulativos en los centros y de la dificultad de manejar las representaciones en papel de los cuerpos espaciales. Pero, en este sentido, surge la cuestión de si hay alguna estrategia de enseñanza óptima entre las diversas posibilidades que se presentan de organización de entornos de aprendizaje basados en el uso de materiales manipulativos únicamente, sólo de programas de ordenador, o en el uso combinado de ambos. Mientras que el uso en las aulas de materiales manipulativos para la enseñanza de la geometría espacial (por ejemplo, modelos de sólidos) ha mostrado su eficacia en algunos casos (Clements y Battista, 1992; Parzysz, 1988), también presenta limitaciones en otros casos debido a su rigidez, lo cual dificulta, por ejemplo, actividades de manipulación en el interior de un poliedro o de corte o intersección (Accascina y Rogora, 2006). Por otra parte, existen numerosas publicaciones que informan de resultados positivos del uso de programas de geometría dinámica para facilitar la comprensión de los conceptos geométricos y su aprendizaje, así como para progresar en el aprendizaje de los procesos de demostración (Battista, 2007; Laborde, Kynigos, Hollebrands y Sträesser, 2006), También hay publicaciones que informan de experiencias en las que el uso de programas de geometría dinámica puede no ser positivo para los estudiantes (Accascina y Rogora, 2006; Mariotti, 2001; Roberts y Stephens, 1999).

La inmensa mayoría de las publicaciones mencionadas en el párrafo anterior se refieren a programas de geometría dinámica plana. Entre las pocas publicaciones referidas a investigaciones sobre enseñanza con programas de geometría dinámica 3-dimensional, también encontramos algunas que informan de resultado favorables (Güven y Kosa 2008; McClintock, Jiang y July, 2002), mientras que otros autores muestran dificultades de aprendizaje inducidas por estos entornos (Accascina y Rogora, 2006). Esta diversidad de resultados, y el hecho de que no se pueden extrapolar a la geometría espacial las formas de enseñanza o aprendizaje en entornos de geometría dinámica plana, hacen necesario obtener información experimental sobre diversos aspectos del aprendizaje de la geometría espacial en entornos que incluyan programas de geometría dinámica 3-dimensional, como los procesos de aprendizaje y comprensión de los estudiantes, las características de las interacciones entre estudiantes y programas informáticos, el papel del software en entornos puramente informáticos o en entornos mixtos manipulativos e informáticos, el papel del profesor en estos entornos de enseñanza y aprendizaje, etc.

En este contexto, presentamos resultados relativos a dos objetivos de una investigación más general.

- ♦ Aportar información sobre los procesos de aprendizaje de conceptos de geometría espacial.
- ♦ Aportar información sobre la viabilidad de los entornos de enseñanza de geometría espacial basados únicamente en el uso de programas de geometría dinámica 3-dimensional.

En concreto, analizamos la actuación de un estudiante de altas capacidades matemáticas de segundo curso de educación secundaria obligatoria (ESO) durante el desarrollo de un experimento de enseñanza de conceptos geométricos relativos a paralelismo entre rectas y/o planos en el espacio mediante un entorno de Cabri 3d, y tratamos de identificar posibles beneficios y deficiencias de este tipo de entornos para el aprendizaje de dichos conceptos matemáticos y para el desarrollo de las capacidades de razonamiento matemático y de visualización espacial.

ANTECEDENTES

En esta sección hacemos un recorrido por diversas investigaciones sobre la enseñanza de la geometría espacial mediante entornos de geometría dinámica 3-dimensional. Por una parte, hay investigaciones centradas en analizar el desarrollo de la génesis instrumental (Rabardel, 1999, 2002) de los estudiantes cuando empiezan a utilizar programas de geometría dinámica 3-dimensional (Alba, 2012; Mackrell, 2006; Salazar, 2009). Se han identificado procesos y dificultades similares a los que ocurren en los programas de geometría dinámica plana en lo referente al uso de los menús o el arrastre, y también se han identificado procesos y dificultades relacionados con la forma que tiene el programa de representar los objetos espaciales en la pantalla y con la necesidad de poseer habilidades de visualización espacial.

Una cuestión abierta de investigación sobre el aprendizaje en entornos de geometría dinámica, planteada por Battista (2007), es analizar si los estudiantes distinguen o no las propiedades geométricas de las construcciones que manipulan en la pantalla de las características de esas figuras propias del comportamiento del software (por ejemplo, los grados de libertad de movimiento de un punto o la aparente intersección entre rectas en el espacio). Healy (2000) introdujo los constructos de construcción de figuras "robustas" (cuando la figura incorpora todas las condiciones matemáticas del enunciado del problema y las conserva durante el arrastre) y "débil" (cuando la figura no incorporan alguna de las condiciones matemáticas del enunciado del problema y, por tanto, no la conservan durante el arrastre de tipo test) (Arzarello, Micheletti, Olivero, y Robutti, 1998). Laborde (2005) analiza el papel de las construcciones robustas y débiles en los programas de geometría dinámica plana, prestando atención a cómo utilizan los estudiantes unas u otras durante la resolución de los problemas. Además, Laborde hace una pequeña incursión en la geometría espacial, al presentar algunos ejemplos de construcciones robustas y débiles y plantear que las construcciones débiles parecen ser especialmente útiles para los estudiantes en programas de geometría dinámica 3-dimensional. Esto se debe a que la capacidad de visualización y la intuición en geometría espacial de los estudiantes son mucho más débiles que en geometría plana. Mammana, Micale y Pennisi (2010) elaboraron un experimento de enseñanza en el que combinaron programas de geometría dinámica plana y espacial para estudiar simultáneamente propiedades de cuadriláteros y tetraedros, jugando con la ambigüedad que se crea al dibujar en una hoja de papel un cuadrilátero con sus diagonales y un tetraedro. McClintock et al. (2002) realizaron un experimento de enseñanza de propiedades de poliedros en el que constataron que el software ayudó a los estudiantes a centrar la atención en las propiedades matemáticas de los poliedros y no en las visuales.

Otro foco de atención de las investigaciones es la relación entre el uso de programas de geometría dinámica 3-dimensional y el desarrollo de habilidades de visualización. Güven y Kosa (2008) mostraron una correlación positiva en un grupo de futuros profesores de matemáticas entre el uso de Cabri 3d y el incremento de su capacidad de visualización. Sin embargo, Accascina y Rogora (2006) analizaron los procesos de aprendizaje con un programa de geometría dinámica 3-dimensional de futuros profesores de educación secundaria y observaron que los estudiantes tuvieron dificultades derivadas, principalmente, del hecho de que el ordenador realmente presenta una representación plana, en la pantalla, de los objetos espaciales. Sus resultados muestran que algunos estudiantes sufrieron errores de aprendizaje derivados de la dificultad de visualización de los sólidos en la pantalla, que hace que los estudiantes vean relaciones que no son ciertas o no perciban relaciones verdaderas, por ejemplo sobre posiciones de rectas en planos perpendiculares.

Dada la numerosa literatura sobre aprendizaje y enseñanza mediante entornos de geometría dinámica plana, sería útil poder llevar esos resultados al terreno de la geometría espacial. Pero Baldin (2008), reflexionando sobre las diferencias entre ambos tipos de entornos, mostró que estas diferencias impiden trasladar directamente las metodologías de enseñanza de uno al otro. Los principales motivos alegados son las diferencias entre las formas de representación en geometría plana (representación realista en el plano de la pantalla del ordenador) y geometría espacial (proyección sobre el plano de la pantalla).

Uno de los principales usos de los entornos de geometría dinámica plana es promover el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes y el aprendizaje de la demostración. Los resultados de McClintock et al. (2002) y Mithalal (2010a, 2010b) parecen indicar que sí es posible aprovechar también los programas de geometría dinámica espacial con dichos objetivos. Estos investigadores observaron una evolución de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes. McClintock et al. (2002) observaron que el uso del software facilitó la resolución de los problemas al permitir a los estudiantes confirmar o rechazar con facilidad sus conjeturas, ayudando a mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes. Mithalal (2010a, 2010b) observó que el uso de un programa de geometría dinámica 3-dimensional favoreció que los estudiantes empezaran a utilizar elementos del sistema axiomático de la geometría euclidiana en vez de solo elementos visuales.

Mencionábamos en la introducción que no hay resultados concluyentes sobre los beneficios de usar únicamente materiales manipulativos, solo programas informáticos o combinaciones de ambos. A comienzo de los años 90 realizamos un proyecto de investigación en el que combinamos los tres contextos de materiales manipulativos, representaciones en papel (proyecciones normalizadas) y programas de geometría dinámica 3-dimensional primitivos (Guillén, Gutiérrez, Jaime y Cáceres, 1992; Gutiérrez, 1992, 1996; Gutiérrez y Jaime, 1993). Analizar la evolución de las habilidades de visualización de los estudiantes al resolver actividades en las que debían combinar información proporcionada por diferentes contextos o representar un sólido en un contexto a partir de su representación en otro era uno de los objetivos. El estudio mostró que cada contexto y cada forma de representación de un objeto espacial tiene sus ventajas e inconvenientes. Se puso de manifiesto que unos contextos son más adecuados para realizar determinadas actividades que otros. También se mostró que estudiantes de diferentes edades o capacidades pueden trabajar con determinado contextos o formas de representación pero no con otros. Una limitación de la investigación en relación con los objetivos de este artículo es que no pretendía el aprendizaje de contenidos de geometría espacial tales como propiedades de poliedros.

Más recientemente, Baki, Kosa y Guven (2011) observaron a futuros profesores realizando una unidad de enseñanza de sólidos implementada en tres versiones, basadas en materiales manipulativos, Cabri 3d o el estilo tradicional de clase, centrado en el profesor sin ninguno de los soportes anteriores. Un tratamiento estadístico de pre y post-test basado en el *Purdue Spatial Visualization Test* permitió concluir que el entorno de ordenador es el que más favorece el desarrollo de la capacidad de visualización de los estudiantes, seguido por el entorno de materiales manipulativos. Además, se puso de manifiesto que la clase tradicional, sin recursos auxiliares, es el entorno menos favorable.

Sack (2013) diseñó un entorno para el aprendizaje de las proyecciones ortogonales de sólidos basado, como en nuestro estudio, en el uso combinado de material manipulativo (cubos apilables), representaciones planas de módulos de cubos y un programa de ordenador que permite realizar las mismas construcciones que con al material manipulativo. Esta autora concluyó que el uso conjunto de las tres formas de representación y la manipulación fue beneficioso porque ayudó a los estudiantes a familiarizarse con el lenguaje y los símbolos propios de la proyección ortogonal.

MARCO TEÓRICO

En coherencia con los objetivos de la investigación planteados al final de la introducción, nos proponemos analizar la evolución del aprendizaje y de la capacidad de razonamiento matemático de un estudiante cuyas respuestas a diversas actividades presentamos en este texto. Para ello, utiliza dos herramientas teóricas: (a) el modelo de las imágenes conceptuales de Vinner y (b) el modelo de los niveles de razonamiento de Van Hiele. Además, como el estudiante participante en el experimento tiene características de talento matemático superior a la media, observamos también si, a lo largo de las sesiones de trabajo, el estudiante muestra rasgos característicos de su alta capacidad matemática.

Vinner (1983, 1991) propuso un modelo para explicar los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos con un soporte gráfico o visual destacado. Este modelo se aplica en la enseñanza de la geometría (Gutiérrez y Jaime, 1996) pero también en otras áreas como el análisis matemático (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1991). Descrito de manera muy breve, el modelo de Vinner distingue dos principales formas de recepción de la información matemática por los estudiantes: verbal y gráfica.

La información verbal está formada, inicialmente, por las definiciones de los conceptos, y también por enunciados de propiedades, clasificaciones, etc. Toda esta información se almacena en la memoria de los estudiantes en lo que Vinner denomina definición del concepto.

La información gráfica está formada, inicialmente, por dibujos o figuras que representan ejemplos concretos de conceptos matemáticos y también por otras informaciones gráficas como diagramas, esquemas, etc. Toda esta información se almacena en la memoria de los estudiantes en lo que Vinner denomina imagen del concepto.

Las inconsistencias que cometen los estudiantes, entre los criterios que usan realmente en la resolución de un problema y los argumentos que verbalizan para justificar esa resolución, son consecuencia de tener una imagen del concepto muy pobre y de la desconexión entre la definición del concepto y la imagen del mismo. Por ejemplo, un estudiante que debe clasificar un conjunto de cuadriláteros dibujados puede rechazar una figura como cuadrado debido a que la ve apoyada en un vértice pero, a continuación, recitar correctamente la definición de cuadrado para justificar las figuras que ha seleccionado como cuadrados.

Desde el punto de vista del modelo de Vinner, la enseñanza debe procurar que los estudiantes formen unas imágenes conceptuales completas y conteniendo la mayor diversidad posible de imágenes. También es recomendable que aprendan a integrar su imagen conceptual y su definición del concepto durante la resolución de problemas.

La problemática derivada de la pobreza de las imágenes conceptuales es especialmente importante en geometría espacial. En la actualidad, el uso de programas de geometría dinámica 3-dimensional puede ser un complemento a los materiales manipulativos y a las representaciones estáticas en los libros de texto que ayude a los estudiantes a crear imágenes mentales adecuadas. Por este motivo, es interesante observar la actuación del estudiante de nuestra investigación desde esta perspectiva teórica, identificando sus definiciones e imágenes de conceptos iniciales y observando su posible evolución a lo largo del experimento de enseñanza.

El modelo de razonamiento matemático de Van Hiele es suficientemente conocido en sus facetas de herramienta para la investigación didáctica y para la enseñanza de las matemáticas, por lo que no vamos a describirlo aquí. Los lectores pueden encontrar descripciones detalladas y síntesis de la investigación en Jaime y Gutiérrez (1990), Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), Gutiérrez y Jaime (1998), Owens y Outhred (2006) y Battista (2007).

Al ser uno de los objetivos de esta investigación analizar la posible evolución del razonamiento matemático del estudiante que participó en la investigación, los niveles de Van Hiele nos permiten evaluar el nivel de razonamiento puesto en juego en la resolución de cada tarea e identificar las variaciones que puedan surgir durante la experimentación.

Es suficientemente conocido que los individuos superdotados o con talento especialmente desarrollado para algún tipo de actividad muestran en su forma de actuar, expresarse o de resolver tareas características específicas que se diferencian de las mostradas por otros individuos. En lo referente al talento matemático, ha habido diversas investigaciones dirigidas a identificar rasgos diferenciadores de los estudiantes superdotados o con altas capacidades matemáticas. Benavides (2008) y Ramírez (2012) han sintetizando resultados sobre esta cuestión publicados por otros autores, como Krutetskii, Greenes, Miller o Freiman. A partir de dichas síntesis y de otros autores como Diezmann y Watters (2002), El-Demerdash (2010) y Heinze (2005), es posible obtener una lista completa de rasgos característicos de estudiantes de altas capacidades matemáticas. Algunos de estos rasgos solo los muestran de manera significativa los estudiantes con altas capacidades matemáticas. En otros casos, los rasgos se pueden ver también en los estudiantes de capacidad matemática media, pero los estudiantes de mayor capacidad matemática los muestran de manera más intensa o desarrollada. No se debe entender que cada estudiante de altas capacidades matemáticas debe mostrar todos esos rasgos, pues la presencia de unos u otros depende de diversos factores como la edad o el nivel de talento del estudiante, el contenido matemático presente, o el tipo de tarea planteada. Destacamos los rasgos que consideramos dominantes o más frecuentes a continuación.

- ♦ Alta capacidad para razonar analítica o espacialmente.
- ♦ Habilidad o potencial para obtener resultados creativos en matemáticas.
- ♦ Habilidad para obtener respuestas a problemas matemáticos con rapidez y exactitud inusuales.
- ♦ Capacidad para ver relaciones entre temas, conceptos o ideas sin que haya estudiado tales relaciones en la enseñanza formal.
- ♦ Capacidad para localizar la clave de los problemas.
- ♦ Comprensión intuitiva de funciones y procesos matemáticos que les permite saltar pasos intermedios para llegar a la respuesta.
- ♦ Habilidad para abstraer, generalizar y transferir conocimientos, en particular, para identificar semejanzas entre estructuras y soluciones de problemas, para usar razonamiento analógico y para verbalizar principios comunes.
- ♦ Competencia para examinar ejemplos y contra-ejemplos, para conjeturar y para abstraer estructuras similares de los problemas o soluciones.
- ♦ Habilidad para abreviar los procesos al resolver problemas de tipo similar a otros resueltos antes.
- ♦ Habilidad para verbalizar y para explicar o razonar.

En la experimentación que presentamos en este artículo, hemos trabajado con un estudiante de altas capacidades matemáticas, por lo que es interesante analizar sus resoluciones de las actividades propuestas y sus respuestas desde el punto de vista de las características del talento matemático. Esta información nos permitirá, en el futuro, comparar su actividad de resolución de problemas y de aprendizaje con las de otros estudiantes con capacidades matemáticas más o menos altas que trabajen con la misma unidad de enseñanza o con otras similares.

METODOLOGÍA

La unidad de enseñanza experimental que utilizamos en este estudio está basada en contenidos de geometría espacial de segundo curso de educación secundaria obligatoria. Está formada por un conjunto de 34 actividades enfocadas a plantear situaciones de geometría espacial exploratorias, en las que se pide realizar construcciones en el ordenador cuya manipulación ayude a generar o a validar conjeturas que, después, puedan convertirse en conocimiento institucionalizado (Brousseau, 2002). Algunas actividades tienen como objetivo principal perfeccionar el manejo del programa Cabri 3d en algunos aspectos específicos que serán importantes para la adecuada resolución de otras actividades. Las demás actividades tienen como objetivo el aprendizaje de los conceptos de rectas y/o planos coincidentes, secantes, paralelos y perpendiculares y de rectas que se cruzan, así como algunas propiedades básicas de estos conceptos.

La unidad de enseñanza está acompañada de un cuestionario escrito (sin posibilidad de usar el ordenador), diseñado para administrarlo antes de empezar las actividades, con el fin de identificar los conocimientos previos (correctos, parciales o erróneos) del estudiante sobre los contenidos matemáticos objeto de estudio. El cuestionario está formado por 18 cuestiones en las que el estudiante debe dibujar alguna configuración de rectas y/o planos o deben explicar y justificar si se cumple o no determinada propiedad bajo ciertas condiciones.

Para cada actividad, el estudiante dispone de un archivo de Cabri 3d y de una ficha con el enunciado de la actividad y, en caso necesario, algunas indicaciones sobre el uso del programa informático. Durante la resolución de cada actividad, el estudiante puede combinar la manipulación en el ordenador con la escritura o dibujo en la ficha. En todo caso, siempre se le pide que escriba sus respuestas en la ficha y que las justifique adecuadamente.

El experimento de enseñanza que describimos y analizamos en este artículo se realizó como actividad extraescolar con un estudiante de segundo curso de educación secundaria obligatoria, identificado en el sistema educativo español como superdotado y que muestra un talento matemático claramente superior a la media. Este estudiante, antes de empezar la experimentación, utilizaba con fluidez programas de geometría dinámica plana. También había utilizado ocasionalmente Cabri 3d, para realizar construcciones con poliedros. Esta experiencia previa en el uso de programas de geometría dinámica le permitió empezar la experimentación manejando con confianza los comandos de construcción de Cabri 3d y la selección y arrastre de objetos.

Antes de empezar el experimento de enseñanza, el estudiante tenía los conocimientos de geometría típicos de segundo curso de educación secundaria obligatoria. En geometría plana había estudiado las relaciones entre rectas en el plano (corte, perpendicularidad y paralelismo) y, en geometría espacial, conocía los elementos descriptivos de poliedros y cuerpos redondos, pero no había estudiado nada relacionado con los contenidos de la unidad de enseñanza de nuestro estudio.

El experimento de enseñanza se desarrolló durante ocho sesiones en forma de entrevistas entre uno de los investigadores y el estudiante. Este formato permitió, además, completar la información proporcionada por el estudiante en sus respuestas cuando el investigador veía que una respuesta era incompleta o daba pie a alguna pregunta complementaria no prevista en el cuestionario escrito. En la primera sesión, el estudiante respondió al cuestionario inicial. En las sesiones segunda a quinta, el estudiante resolvió 24 actividades. En la sexta sesión, respondió de nuevo a dicho cuestionario, con el fin de evaluar la variación de sus conocimientos iniciales. En las dos últimas sesiones, el estudiante resolvió las 10 actividades restantes.

Las 34 actividades están centradas en: aprendizaje de aspectos particulares del uso de Cabri 3d (10 actividades), corte de rectas y/o planos (8), paralelismo entre rectas y/o planos (9), cruce (1), perpendicularidad entre rectas y/o planos (3), corte y paralelismo (2) y corte, cruce y paralelismo (1). En la sección siguiente presentamos los enunciados de las preguntas del cuestionario y las actividades de la unidad de enseñanza relacionadas con el paralelismo de rectas y/o planos en el espacio.

En cada sesión se recogieron las fichas con las respuestas del estudiante, escritas con un bolígrafo digital que también graba sonido, los archivos de Cabri 3d usado por el estudiante y las interacciones con el ordenador mediante un programa de captura de pantalla que también graba las conversaciones entre estudiante e investigador.

En esta investigación hemos adoptado una metodología exploratoria de estudio de casos, ya que se trata de un tema del que apenas hay información fiable disponible y se ha observado solamente a un estudiante. Por tanto, nuestro objetivo metodológico principal es describir el desarrollo del experimento de enseñanza y analizarlo para dar respuesta a los objetivos planteados en la introducción.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Como hemos comentado, las actividades planteadas al estudiante cubren una diversidad de contenidos de geometría espacial relativos a rectas y planos. En este artículo nos centramos en lo que tiene que ver con el aprendizaje de los conceptos relativos al paralelismo entre rectas y/o planos en el espacio. En esta sección presentamos los datos recogidos durante las sesiones de trabajo. Concretamente, presentamos (a) las interacciones con el programa de geometría dinámica 3-dimensional, (b) las respuestas verbales o escritas del estudiante y (c) los diálogos con el investigador, quien actuaba como profesor. Hemos organizado la sección en dos partes. La primera parte está dedicada a explorar los conocimientos previos del estudiante. La segunda parte está dedicada a describir el desarrollo de las sesiones y analizar los procesos de aprendizaje.

Conocimientos iniciales del estudiante

En la primera sesión, el estudiante respondió las preguntas del cuestionario escrito inicial, sin uso del ordenador. Esto permitió averiguar sus conocimientos previos y sus concepciones iniciales sobre el tema objeto de estudio. Todas las preguntas del cuestionario, excepto las que solo son de dibujar, piden justificar la respuesta. En los siguientes párrafos, presentamos las respuestas a las preguntas del cuestionario inicial sobre paralelismo. Los números de las cuestiones que presentamos no son consecutivos porque no se corresponden con la numeración que se le presentó al estudiante, pues están intercaladas con cuestiones relativas a otros contenidos estudiados pero no analizados en este texto.

La pregunta 1 del cuestionario pide dibujar un plano y dos rectas paralelas que estén en el plano. La pregunta 2 cuestiona "¿cuántos puntos tienen en común dos rectas paralelas?" La figura 1 muestra los dibujos hechos por el estudiante en las preguntas 1 y 2, respectivamente. La justificación que dio en la pregunta 2 es que las dos rectas paralelas "No tienen ningún punto en común porque las rectas paralelas nunca se cortan".

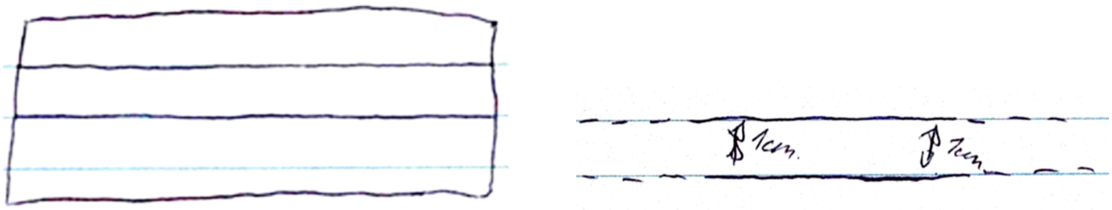

Figura 1. Dibujos hechos en las preguntas 1 y 2

El estudiante combinó un dibujo que corresponde a una figura prototípica de rectas paralelas (dibujadas en horizontal, aunque esto se debe principalmente a que usa las líneas de la hoja como guía) con una justificación verbal que aludía a la definición escolar típica de que las rectas paralelas no se cortan. Esto podría parecer una respuesta estándar, pero el estudiante añadió en el dibujo la referencia a la distancia entre las rectas, que nos permite ver que estaba combinando elementos matemáticos de diferentes tipos y que su razonamiento matemático era del nivel 2 avanzado de Van Hiele.

La pregunta 6 requiere dibujar dos planos paralelos y la pregunta 7 cuestiona "¿cuántos puntos tienen en común dos planos paralelos?" La figura 2 muestra el dibujo hecho por el estudiante en la pregunta 6, en el que adelantó parte de la respuesta de la pregunta 7. La justificación que dio en la pregunta 7 fue: “Ninguno” (ver preguntas 2 y 6).

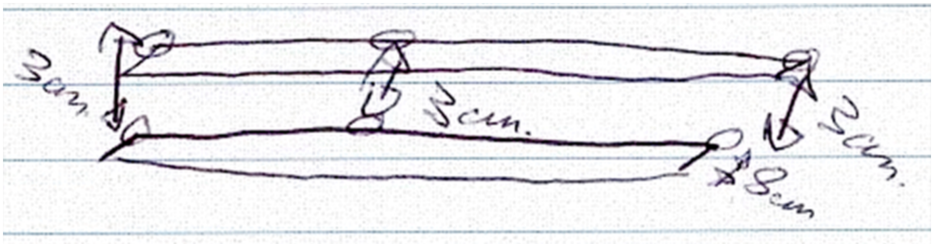

Figura 2. Dibujo hecho en la pregunta 6

La pregunta 11 pide dibujar un plano y una recta paralela y la pregunta 12 cuestiona “¿cuántos puntos tienen en común un plano y una recta paralela?” La imagen izquierda de la figura 3 muestra el dibujo hecho por el estudiante para responder la pregunta 11, con el siguiente diálogo entre uno de los investigadores (I) y el estudiante (E).

I: ¿Por qué son paralelas [al plano]?

E: Porque nunca lo tocan. ... Y, además, porque la distancia, por ejemplo, de aquí a aquí es la misma que de aquí a aquí y que de aquí a aquí, etc., etc., etc., etc. [mientras dibujaba los segmentos de distancia entre la recta superior y el plano].

I: ¿Puedes dibujar también una recta que no sea paralela?

E: Sí [dibujando la recta *1* de la figura 3 (imagen derecha)].

I: ¿Y si la recta estuviera por aquí fuera? Déjame el boli [dibujando la recta 2 de la figura 3 (imagen derecha)]... ¿Esa recta cómo sería?

E: No paralela, porque de aquí a aquí no hay la misma distancia que de aquí a aquí ni que de aquí a aquí, etc., etc. [mientras añadía los segmentos de distancia entre la recta 2 y el plano]

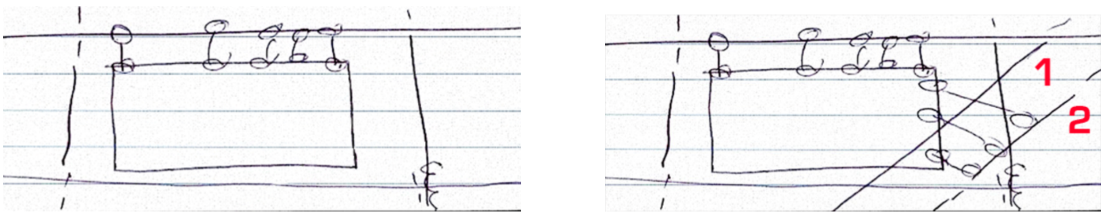

Figura 3. Dibujos hechos en la primera y segunda parte de la pregunta 11

La justificación que escribió el estudiante en la pregunta 12 es: “¡Ninguno!” (ver preguntas 7, 6, 2).

Finalmente, la pregunta 17 requiere dibujar dos rectas que estén en planos paralelos y la pregunta 18 cuestiona “¿cuántos puntos tienen en común dos rectas que están en planos paralelos?” La figura 4 muestra los dibujos hechos para responder a estas preguntas, respectivamente.

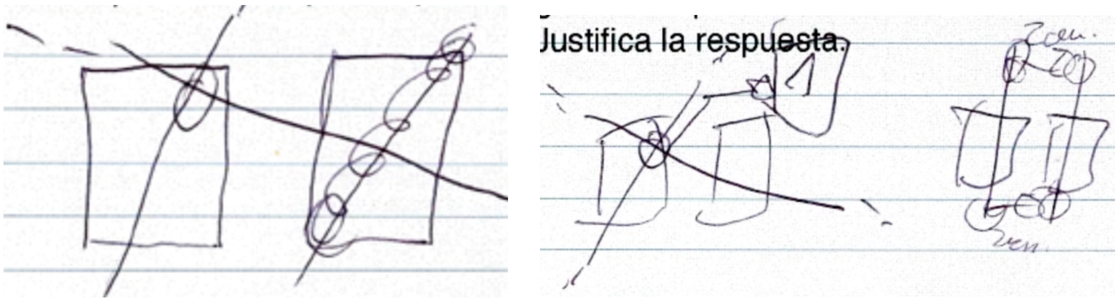

Figura 4. Dibujos hechos en las pregunta 17 y 18

A la vista del conjunto de respuestas, es interesante observar que, aunque el estudiante nunca había utilizado el concepto de planos paralelos, en las preguntas 6 y 7 extrapoló de manera natural, el concepto de rectas paralelas. Además, hizo referencia explícita a ello cuando obvió la justificación en la pregunta 7 refiriéndose a sus respuestas a preguntas anteriores. Esto lo hizo gracias a sus capacidades para generalizar y transferir conocimientos y para abreviar los procesos al resolver problemas similares a otros planteados en actividades anteriores. Ambas capacidades son rasgos característicos de los estudiantes con talento matemático superior.

No obstante, las preguntas 11, 17 y 18 ponen claramente de relieve que la concepción de plano en el espacio 3-dimensional que estaba manejando el estudiante era errónea, pues lo consideraba como una región acotada, como consecuencia de la imagen conceptual que había generado al ver la forma como se representan los planos en Cabri 3d. Y ello a pesar de que su concepción de recta en el espacio era correcta, como lo demuestran la forma de dibujar las rectas y algunos comentarios hechos en otras preguntas indicando que las rectas se prolongan indefinidamente. Hay que tener también en cuenta que Cabri 3d dibuja las rectas de extremo a extremo de la pantalla, por lo que, a diferencia de lo que ocurre con los planos, el programa sí transmite la idea de que las rectas se prolongan indefinidamente.

Por otra parte, los dibujos de respuesta a las preguntas 17 y 18 muestran que la imagen conceptual de las relaciones entre rectas y/o planos en el espacio que tenía el estudiante estaba "aplanada", como formando parte de la geometría 2-dimensional. Esta concepción es la base para que el estudiante considerara coherentes las respuestas a la preguntas 17 y 18, en las que dos rectas contenidas en planos paralelos se podían cortar.

Nos encontramos, por tanto, ante un estudiante que tenía un conocimiento correcto y bastante superior al habitual en los estudiantes de su curso, de los elementos de geometría plana relativos al paralelismo en el plano. Al no haber tenido más contacto con los conceptos correspondientes de geometría espacial que sus interacciones iniciales con Cabri 3d, tenía un conocimiento parcial e incorrecto de los elementos de geometría espacial relacionados con el paralelismo en el espacio, basado en una imágenes conceptuales demasiado pobres. A continuación, vemos si el estudiante consigue superar este obstáculo al resolver las tareas propuestas en la unidad de enseñanza y aprender correctamente esos conceptos.

Desarrollo de la secuencia de enseñanza: primera parte

A continuación sintetizamos y analizamos los episodios más significativos de las actividades cuyo objetivo es el aprendizaje del paralelismo entre rectas y/o planos en el espacio. La secuencia de actividades trata diversos temas de forma simultánea, por lo que los números de las actividades que vamos a comentar no tienen por qué ser consecutivos. Buscamos los momentos clave del aprendizaje experimentado por el estudiante, mostrando las respuestas verbales y las manipulaciones en el ordenador que expliquen el proceso de aprendizaje.

La actividad 14, la primera sobre paralelismo, pide crear una recta *r* a partir de dos puntos *A* y *B* que no estén en el plano base[1] y una recta paralela a *r* que pase por un punto *P*, exterior a *r* y al plano base. Después, la actividad solicita arrastrar los puntos *A*, *B* y *P*, y observar lo que sucede en la pantalla. El estudiante hizo la construcción que se puede observar en la imagen superior izquierda de la figura 5, tras lo que se produjo la siguiente conversación.

I: Vale. ¿Esas dos rectas son paralelas?

E: [Cambiando el punto de observación hasta que las dos rectas se ven superpuestas (figura 5, imagen superior derecha)] Sí. ¿Ves? Son la misma.

I: Pero, así, por ejemplo [cambiando el punto de observación hasta la posición de la figura 5, imagen inferior], no se ven muy paralelas.

E: Porque es un efecto visual.

[1] Se llama plano base al plano que aparece en la pantalla cuando arranca Cabri 3d. El plano base es el plano XY. Se llama parte visible del plano base al cuadrilátero que representa al plano en la pantalla del ordenador, que tiene unas características particulares en lo referente a los grados de libertad de los puntos creados en ella.

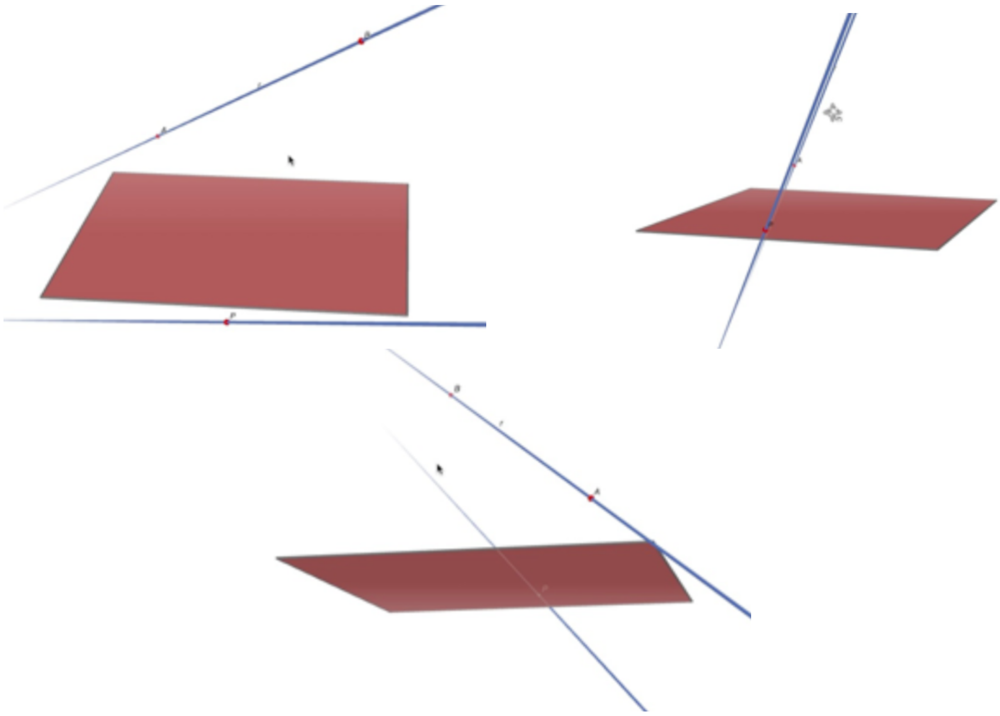

Figura 5. Actividad 14

El estudiante utilizó un criterio visual para justificar que las dos rectas eran paralelas, concretamente, que es posible verlas superpuestas en la pantalla (figura 5, imagen superior derecha) y que cuando se ven convergentes es consecuencia del efecto visual de acercamiento producido por la perspectiva (figura 5, imagen inferior).

La actividad 15 pregunta ¿cuántas rectas paralelas a una recta *c* dada se pueden trazar por un punto *Q* exterior a la recta? El estudiante contestó inmediatamente que sólo se puede trazar una recta "Porque sólo hay una paralela". Después, la actividad pregunta cuántos puntos tienen en común dos rectas paralelas y se produce la siguiente conversación.

E: Ninguno.

I: ¿Ninguno por qué?

E: Porque no se tocan nunca.

I: ¿Por qué no se tocan nunca?

E: Porque son paralelas.

I: Por la definición de paralelas.

Es evidente que el estudiante aún no sabía manejar adecuadamente elementos de un sistema axiomático, en particular axiomas y definiciones, lo cual le hizo entrar en un argumento circular.

La actividad 17 presenta dos rectas paralelas *c* y *d* y pide crear planos que pasen por las dos rectas paralelas *c* y *d*. El estudiante utilizó el comando "plano" de Cabri 3d (que crea un plano marcando dos rectas paralelas o secantes) y marcó cuatro veces seguidas las dos rectas (ver figura 6, imagen superior izquierda). Entonces dijo que había creado cuatro planos. Tras la pregunta "¿cuántos planos has podido crear?", se produjo la siguiente conversación.

E: Distintos, ninguno, porque sólo hay uno, así que no he podido crear ninguno distinto.

I: Entonces, ¿qué es lo que has hecho cuatro veces?

E: El mismo plano.

I: ¿Por qué?

E: Porque... por ejemplo, si tenemos [que dibujar] una parábola y nos dan dos puntos [dibujando los puntos marcados en rojo en la figura 6 (imagen superior centro)], puede ser así, así, así [dibujando las parábolas de la figura 6 (imagen superior centro)]. Pero ahora, ponemos un punto [dibujando otro punto, figura 6 superior derecha] y lo que hacemos es coger la que pase por aquí [remarcando la parábola que pasa por los tres puntos, figura 6 (imagen superior derecha)]. Pues entonces, si nos dan una recta, el plano puede estar así [dibujando la figura 6 (imagen izquierda de la segunda fila)], o girado en este sentido [figura 6 (imagen derecha de la segunda fila], o puede estar girado así también [figura 6 (imagen inferior izquierda)]. Pero ahora, al darnos otra recta [figura 6 (imagen inferior derecha)], nos dicen que el plano tiene que estar girado en una dirección, así que nos dicen ya cuál es el plano.

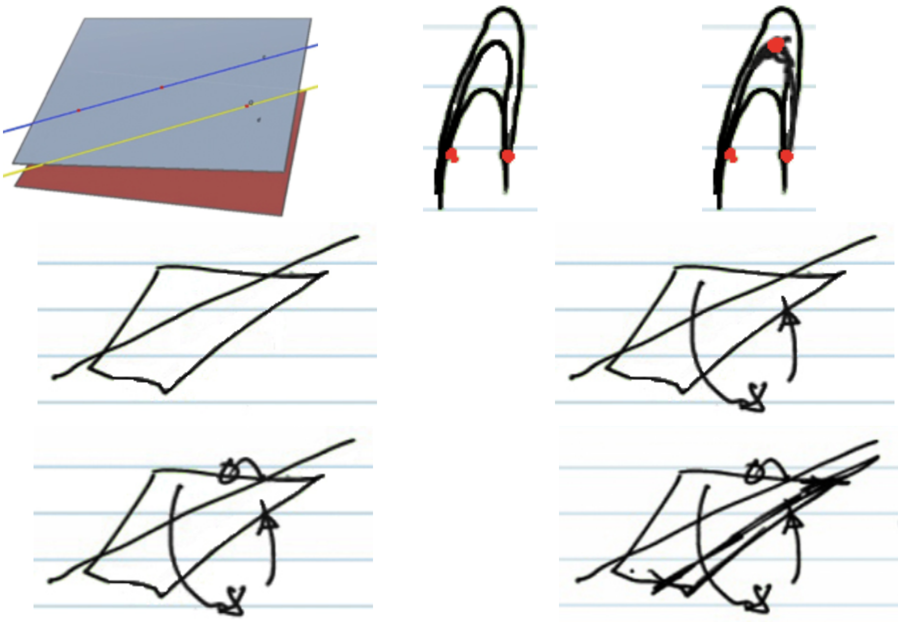

Figura 6. Respuesta a actividad 17

Esta respuesta se entiende sabiendo que el estudiante había trabajado en clase las parábolas hacía poco tiempo y había aprendido que por dos puntos se pueden trazar infinitas parábolas pero por tres puntos sólo se puede trazar una. Por lo tanto, su respuesta se basa en un argumento por analogía con un contexto alejado del que se estaba trabajando en ese momento. Esta capacidad para relacionar temas tan diferentes como las características de las parábolas y de los planos es típica de los estudiantes de altas capacidades matemáticas.

En otro orden de cosas, la imagen inferior derecha de la figura 6 muestra que el estudiante estaba aprendiendo las características gráficas de los dibujos en papel de planos y rectas del espacio, imitando la forma como se ven en la pantalla del ordenador. Ahora los dibujos ya no estaban aplanados como en sus respuestas al cuestionario inicial.

La actividad 19 es similar a la 15, pero referida a planos. En esta actividad hay que construir un plano paralelo al plano *w* por un punto exterior *Q* y pregunta "¿cuántos planos paralelos a *w* se pueden trazar por el punto *Q*?" Después, pregunta "¿cuántos puntos en común tienen dos planos paralelos?" A la primera pregunta, el estudiante respondió que solo hay un plano. Para justificar la respuesta, empezó a dibujar la imagen de la izquierda de la figura 7 (los segmentos representan planos paralelos mostrados en posición ortogonal a la hoja de papel) y se dio la siguiente conversación.

E: Porque las rectas paralelas a ésta, la llamamos inicial [se refería a la línea más gruesa marcada con la letra *I* en la imagen de la izquierda de la figura 7], ...

I: [Interrumpiendo a E] Estamos hablando de planos.

E: Sí, pero el ejemplo es con rectas porque dibujar planos en una hoja de papel cuesta bastante y más aún porque voy a dibujar bastantes. Entonces, tenemos aquí el punto [Q, marcado en rojo en la imagen izquierda de la figura 7] y podemos hacer paralelas así y así y así y así [mientras dibujaba los segmentos de la imagen izquierda de la figura 7 que no pasan por el punto]. Entonces, lo único que cambia es la altura [dibujando la doble flecha vertical], pero sólo nos permiten una única recta [dibujando la línea que pasa por Q], así que sólo tenemos una única opción.

Para contestar la segunda pregunta de esta actividad, volvió a recurrir a los segmentos para representar los planos en el papel (imagen derecha de la figura 7):

E: Ninguno, porque tenemos una línea y ahora tenemos otra. Son paralelas porque de aquí a aquí y de aquí a aquí hay la misma distancia [dibujando las dobles flechas verticales; sabía que deben ser perpendiculares a las líneas, pero dibujaba deprisa, sin cuidar la exactitud] y nunca se cortarán y, como nunca se cortan, pues no tienen ningún punto en común.

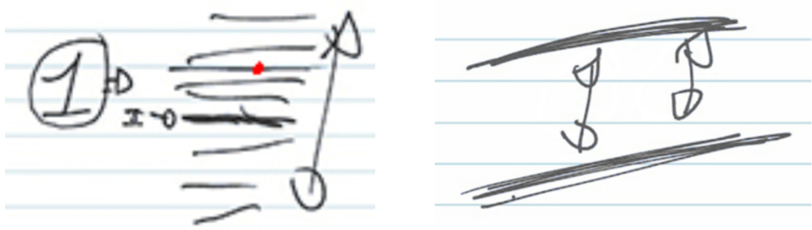

Figura 7. Actividad 19

Resulta significativo que en la actividad 19 el estudiante no movió la construcción hecha en el ordenador. Esto es una señal de que tenía las ideas claras y no necesitaba ninguna comprobación empírica para responder a las preguntas. Otro aspecto importante de esta respuesta es el uso continuo de la analogía entre el paralelismo de rectas y el de planos cuando estos se sitúan ortogonalmente al plano de dibujo (la hoja de papel en este caso). En numerosas ocasiones a lo largo de las sesiones, el estudiante verificó visualmente en el ordenador el paralelismo entre planos o entre planos y rectas, haciendo movimientos para colocar los planos ortogonalmente a la pantalla, es decir, representados por segmentos.

Como ya veíamos en el cuestionario inicial, el estudiante extrapoló las definiciones y propiedades de las rectas paralelas a los planos y redujo el esfuerzo de dibujo utilizando esta posición particular de los planos. Así pone en juego uno de los rasgos típicos de los estudiantes superdotados: la capacidad para percibir la analogía entre dos contextos (el de las rectas en el plano y el de los planos en el espacio), y transferir sus conocimientos de uno al otro.

En cuanto al razonamiento matemático empleado, al comentar las respuestas dadas al cuestionario inicial, veíamos que el estudiante utilizó medidas numéricas concretas en las respuestas mostradas en las figuras 1, 2 y 4. Esto es típico de las respuestas del nivel 2. Sin embargo, en las justificaciones de sus respuestas a las actividades 17 y 19 se observa que el estudiante se expresó de forma abstracta, utilizando los dibujos para facilitar sus explicaciones, pero de forma que estos dibujos no tenían carácter de ejemplos específicos (ya no usó medidas específicas). Además, las respuestas a estas actividades fueron detalladas y encadenaban diversas afirmaciones o propiedades en un argumento deductivo incipiente. Estas respuestas podrían considerarse como demostraciones deductivas simples del tipo experimento mental (Balacheff, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000) y, por lo tanto, el estudiante estaba empezando a utilizar razonamiento del nivel 3 de Van Hiele.

Una de las propiedades importantes necesarias para comprender las relaciones entre rectas y planos en el espacio es la clasificación de las rectas según sus posiciones respecto de un plano: contenidas, secantes y paralelas. La actividad 21 introduce esta propiedad al pedir crear un plano *u* y tres rectas: una que pertenezca al plano, otra que sea secante y otra que esté fuera del plano. En la construcción hecha (imagen izquierda de la figura 8), el plano *u* es el de color gris, la recta que pertenece al plano es *C* y la que está fuera del plano es *A*.

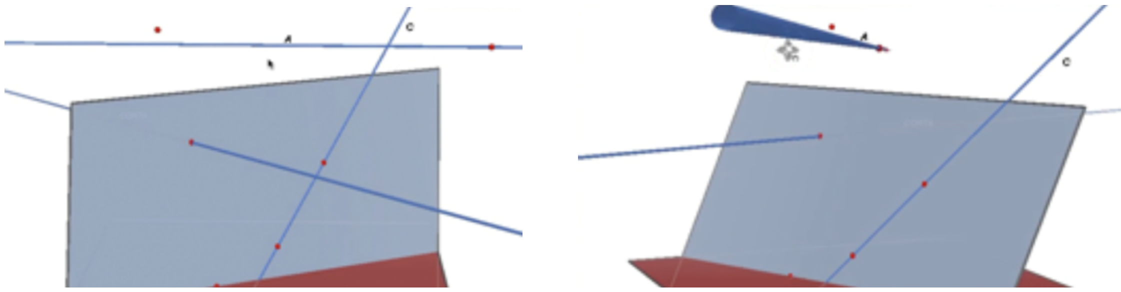

Figura 8. Actividad 21

Seguidamente tuvo lugar el siguiente diálogo.

I: La tercera recta [recta *A*] tiene que estar fuera del plano. ¿Cómo se sabe que está fuera del plano?

E: Porque la ponemos así [imagen derecha de la figura 8] y no corta [al plano *u*].

I: Pero, ¿el plano dónde está?

E: Aquí [mientras desplazaba el cursor sobre la zona visible del plano *u*].

I: ¿Solamente es ese trozo el plano?

E: ¡Ah! Es verdad, no.

I: [Mientras E borraba la recta *A*] ¿Qué pasa?

E: Que [el plano] no es sólo ese trozo. ... Entonces tiene que ser paralela.

I: ¿Por qué?

E: Porque las paralelas son las que no cortan nunca. [ahora construyó una recta paralela a la recta *C*] Ya está. Ahora no corta, porque es paralela.

I: [La nueva recta] Es paralela a la recta que está en el plano [*u*].

E: Sí, y como la recta está en el plano, [la nueva recta] también es paralela al plano.

A continuación, el estudiante explicó que Cabri 3d no permite crear rectas paralelas a planos, por lo que necesitaba usar una recta contenida en el plano *u* como objeto auxiliar para crear la recta paralela al plano. Es decir, que el estudiante acababa de utilizar una propiedad que no había estudiado nunca (si una recta *a* es paralela a otra recta *b*, entonces *a* es paralela a todos los planos que contienen a *b*, excepto al que contiene a ambas rectas), ni había experimentado en ninguna actividad anterior. Por lo tanto, nos encontramos ante otra situación en la que el estudiante usó su capacidad de razonamiento espacial y su intuición matemática, típicas ambas de los estudiantes de altas capacidades matemáticas, que le permitieron intuir propiedades para cuya deducción matemática todavía no tenía conocimientos suficientes.

En la actividad 24 se estudiaron las relaciones entre rectas en el espacio, que el estudiante resolvió sin dificultad y le sirvió para aprender el vocabulario relativo a las diferentes posiciones entre rectas.

Evolución de los conocimientos del estudiante

Después de la actividad 24, planteamos de nuevo el cuestionario inicial al estudiante, para evaluar su progreso respecto de sus concepciones y conocimientos iniciales. Debido a la limitación de espacio, no repetimos los enunciados de las preguntas ni recorremos de forma detallada las ocho preguntas relativas al paralelismo, sino que nos limitamos a mostrar las respuestas más significativas.

En la figura 9 mostramos el dibujo que hizo para la pregunta 1 (dibujar un plano y dos rectas paralelas en el plano; comparar con la figura 1). La respuesta a la pregunta 2 fue igual a la dada al comienzo de la experimentación.

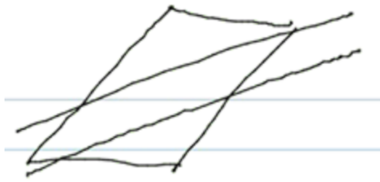

Figura 9. Dibujo hecho en la pregunta 1

En la imagen izquierda de la figura 10 mostramos el dibujo del estudiante en la pregunta 6 (dibujar dos planos paralelos; comparar con la figura 2). Al preguntarle por qué había dibujado así los planos, el estudiante añadió los dibujos que se muestran en la imagen derecha de la figura 10, explicando que los planos se podían dibujar también así, pero que no se vería que son paralelos ni se vería que son dos planos. La respuesta a la pregunta 7 fue igual a la dada al comienzo de la experimentación.

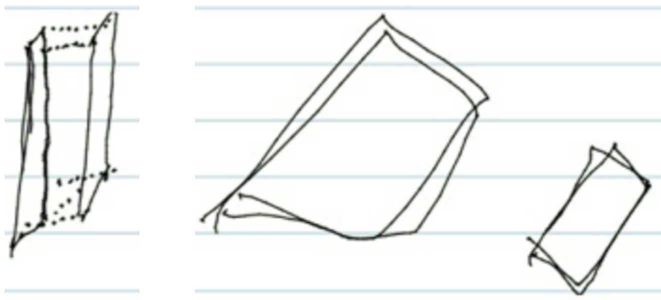

Figura 10. Dibujos hechos en la pregunta 6

En la figura 11 mostramos los dibujos que hizo en la pregunta 11 (dibujar un plano y una recta paralela; comparar con la figura 3). Primero dibujó una vista superior del plano y la recta paralela (ver imagen izquierda de la figura 11) y después los dibujó en posición ortogonal a la hoja de papel para que se viera claramente que la recta y el plano son paralelos (ver imagen derecha de la figura 11). Además, tuvo cuidado de evitar la ambigüedad de representar tanto la recta como el plano mediante segmentos, indicando cuál es cada uno. Como puede verse, el estudiante había superado la concepción errónea de plano y el "aplanamiento" del espacio que mostraba en sus dibujos del cuestionario inicial (figura 3). La respuesta a la pregunta 12 fue igual a la dada al comienzo de la experimentación.

Figura 11. Dibujos hechos en la pregunta 11

La figura 12 muestra los dibujos del estudiante en la pregunta 17 (dibujar dos rectas que estén en planos paralelos; comparar con figura 4). Como en la pregunta 11, primero dibujó dos planos y sus rectas en perspectiva (imagen de la izquierda de la figura 12). Aunque no se percibe en la figura 12, el estudiante dibujó cuatro segmentos, uno por cada plano y cada recta. A continuación, los dibujó en posición ortogonal a la hoja de papel (segunda imagen de la figura 12).

Figura 12. Dibujos hechos en la pregunta 17

Después de hacer los dibujos de la figura 12 (primera imagen de la izquierda), se dio la siguiente conversación.

I: ¿Estas rectas tienen que ser paralelas?

E: Sí.

I: ¿Y no se pueden dibujar de otra manera? ¿Puedes hacer otro dibujo, que no se parezca a aquél [se refería al de la figura 12 (primera imagen de la izquierda), de dos planos y dos rectas?

E: No. ... Sí. Pueden estar... que uno apunte así y el otro apunte así [se refería a los segmentos que representan a las rectas que estaba dibujando, figura 12 (imagen de la derecha)]... Pero estos no se tocan aquí [señalando los extremos de la izquierda en el dibujo, figura 12 (imagen de la derecha)], porque están a alturas ...

I: ¿En aquel caso [figura 12 (imagen de la izquierda)], las rectas serán paralelas?

E: Sí.

I: ¿Y en este? (imagen de la derecha de la figura 12)

E: También, no se cortan. ... ¡Ah!, no. No, porque no tienen la misma distancia entre sí. Entre aquí y aquí [señalando los extremos de la izquierda de las rectas, imagen de la derecha de la figura 12] hay 8 centímetros y entre aquí y aquí [señalando los extremos de la derecha de las rectas] puede haber 2 centímetros ó 6 centímetros ó 28 centímetros.

Los dibujos del estudiante en esta pregunta confirman que el estudiante superó la concepción errónea y el "aplanamiento" mencionados antes. Además, la última parte de su respuesta demuestra que el estudiante adquirió una buena imagen conceptual de las rectas que se cruzan. El estudiante también muestra un dominio adecuado de las ambigüedades inducidas por el software al representar en la pantalla las rectas que se cruzan, pues visualmente es difícil saber con seguridad si dos puntos de dos rectas dibujadas como en la imagen derecha de la figura 12 están más cerca o más lejos que otros dos puntos de dichas rectas.

Finalmente, el estudiante contestó a la pregunta 18 "¿cuántos puntos tienen en común dos rectas situadas en planos paralelos?" que las dos rectas situadas en planos paralelos no tienen ningún punto en común y, para justificar su afirmación, expresó lo siguiente.

E: Los planos son paralelos, las rectas están en los planos, luego las rectas son paralelas.

I: No. Antes has dicho que las rectas no son paralelas.

E: ¡Ah!, perdón. Los planos no se tocan, las rectas están en los planos, luego las rectas no se tocan.

Se observa en las respuestas a las preguntas 17 y 18 que el estudiante todavía no entendía bien que las rectas situadas en planos paralelos pueden no ser paralelas y necesitó los comentarios del investigador-profesor para reaccionar y darse cuenta de que las rectas se pueden cruzar. Por otra parte, la respuesta a la pregunta 18 muestra un típico argumento deductivo propio de un estudiante que está razonando en el nivel 3 de Van Hiele, verbalizado con una claridad poco frecuente entre los estudiantes de capacidad media de su curso.

Desarrollo de la secuencia de enseñanza: segunda parte

Después de la segunda administración del cuestionario inicial, avanzamos en la unidad de enseñanza, planteando al estudiante las 10 actividades restantes, ocho de ellas relacionadas con el paralelismo. Estas actividades, tienen que ver con relaciones entre rectas contenidas en planos paralelos, paralelismo y coplanariedad, y relaciones entre rectas perpendiculares a una recta o un plano y entre planos perpendiculares a una recta.

En la actividad 25 debe crear un plano que pase por dos rectas dadas que se cruzan. Tras varios intentos infructuosos, en los que el estudiante, marcando tres puntos de las dos rectas, creó planos que contenían una de las rectas pero eran secantes a la otra. El estudiante arrastró la recta secante hasta situarla en el plano recién construido. En este momento, se dio cuenta de que las rectas tienen que ser paralelas para poder construir un plano que contenga a ambas. Al tratar de justificar su conjetura, no pudo dar una justificación matemáticamente válida (carecía de algunos conocimientos necesarios) y dijo que si las rectas no son paralelas, "sería un plano curvo y entonces no sería un plano".

La actividad 27 pregunta qué tiene que pasar para que dos rectas situadas en planos paralelos sean paralelas. El estudiante usó la definición de rectas paralelas como las que están siempre a la misma distancia, midiéndola desde cualquiera de sus puntos. Para ello, dibujó dos rectas paralelas y midió su distancia desde dos puntos (figura 13) y escribió: "[tiene que pasar] Que al trazar perpendiculares a la recta *a* y que corten a la recta *b* estén siempre a la misma distancia los puntos de corte de las perpendiculares."

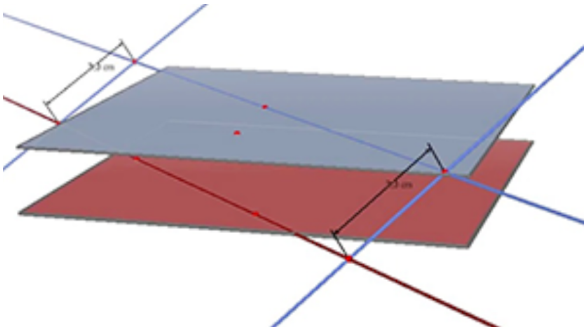

Figura 13. Respuesta a la actividad 27

A continuación, el investigador-profesor le preguntó al estudiante si podría crear en el plano gris una recta paralela a la recta roja sin usar el comando "paralela" de Cabri 3d. El estudiante no tenía suficientes conocimientos geométricos ni de uso de Cabri 3d como para hacer la construcción correcta (es decir, resistente al arrastre), por lo que reprodujo la construcción de la figura 13: (a) trazó dos rectas perpendiculares a la recta roja y al plano gris, (b) creó un punto en cada perpendicular, (c) midió sus distancias a la recta roja, (d) arrastró estos puntos hasta que estuvieran a la misma distancia de la recta roja y (e) creó la recta que pasa por esos puntos.

Esta respuesta es claramente del nivel 2 de Van Hiele, pues la construcción se ha basado en definiciones y propiedades matemáticas correctas pero está hecha manualmente para hacer que las distancias de los puntos a la recta roja coincidan. Nos encontramos ante un ejemplo típico de reducción del nivel de razonamiento motivada por la incapacidad del estudiante para resolver el problema deductivamente (Gutiérrez et al. 1991). El estudiante había demostrado en otras ocasiones que podía realizar razonamientos deductivos del nivel 3 cuando tenía los conocimientos matemáticos necesarios pero, en este caso, al carecer de algunos de esos conocimientos, se vio obligado a utilizar métodos empíricos de trabajo.

El estudiante siguió intentando resolver esta actividad mediante numerosos tanteos en Cabri 3d y con la ayuda del investigador-profesor que le hacía sugerencias en momentos clave. Así, el estudiante aprendió a trazar una recta perpendicular a la recta dada que pase por un punto de un plano, pero no llegó a resolver satisfactoriamente el problema propuesto.

La actividad 29 solicita justificar si es verdadero o falso que las rectas de un plano *v*, paralelo a un plano *u*, son paralelas al plano *u*. El estudiante realizó la construcción de las hipótesis de la conjetura y respondió "como los planos no se cortan, pues la recta que está en el plano [*v*] tampoco, porque como está la recta en el plano [*v*] y los planos no se cortan, pues no se va a cortar la recta con el plano [*u*]". Vemos que el estudiante había vuelto a un terreno más familiar y volvió a desarrollar un argumento abstracto deductivo sin apoyo empírico de las mediciones en Cabri 3d. A continuación, se dio la siguiente conversación.

I: Si la recta cortara al plano gris [el plano *u*], ¿qué querría decir eso?

E: Que [la recta] no estaría en el plano [*v*].

I: O...

E: Que el plano no es paralelo.

I: Que los dos planos no son paralelos, porque entonces el plano [v] también cortaría al plano gris [*v*].

E: Escribió en la hoja de respuestas: "Si $R \cap u \Rightarrow v \cap u$. Si $v \cap u \Rightarrow v$ no $||$ u."

La intención del investigador era ver si el estudiante era capaz o no de manejar una situación de justificación por reducción al absurdo. El estudiante no supo desarrollar este tipo de argumentación por sí mismo, pero parece que, después de la ayuda del profesor, sí comprendía el argumento.

Las tres últimas actividades se centran en las relaciones entre perpendicularidad y paralelismo a partir de las siguientes construcciones: (a) tres rectas perpendiculares a un plano, (b) tres planos perpendiculares a una recta y (c) tres rectas perpendiculares a otra recta. El estudiante tenía claro que las rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí y los planos perpendiculares a una recta son paralelos entre sí. Para sus justificaciones, utilizó la definición de paralelismo basada en la equidistancia y la definición de perpendicularidad (midiendo ángulos rectos). En el tercer caso, hizo una construcción en Cabri 3d para mostrar que las tres rectas perpendiculares pueden ser paralelas entre sí o cruzarse.

Con esta actividad terminó la unidad de enseñanza. Hemos podido apreciar claramente diferencias en la forma de responder del estudiante desde la primera sesión hasta la última. En la sección siguiente hacemos un recorrido por los principales resultados de la experimentación y formulamos nuestras conclusiones globales respecto de los objetivos de la investigación.

CONCLUSIONES

Los objetivos del experimento de enseñanza eran recoger información sobre: (a) los procesos de aprendizaje de la geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional y (b) la utilidad de este tipo de entornos basados exclusivamente en la interacción con un ordenador frente a otros entornos apoyados también en el uso de materiales manipulativos. En este artículo nos hemos centrado en los procesos de aprendizaje de los conceptos relacionados con el paralelismo en el espacio.

Podemos dividir el aprendizaje en dos partes. Una parte es relativa a la comprensión de las formas de representación en el plano (tanto en papel como en la pantalla del ordenador) de los conceptos matemáticos utilizados. La otra parte es relativa al aprendizaje de las definiciones, relaciones y propiedades matemáticas de dichos conceptos.

En relación con las representaciones planas, al comienzo de la experimentación, el estudiante mostró algunas concepciones erróneas inducidas por el uso previo de Cabri 3d. Nos encontramos, por tanto, ante un obstáculo inducido por el uso del programa de geometría dinámica 3-dimensional. Este obstáculo nos hace plantear la conveniencia de investigar la organización de entornos de enseñanza que ayuden a prevenir o evitar dichas dificultades mediante la introducción de los conceptos de geometría espacial no exclusivamente mediante software, sino mediante materiales manipulativos o mediante una combinación de ambos.

Sin embargo, a la vista de los dibujos que el estudiante hizo en el cuestionario inicial, a lo largo de las actividades y en la segunda administración del cuestionario; consideramos que en este estudio se ha puesto de relieve que el uso de Cabri 3d de manera sistemática a lo largo de la secuencia de enseñanza influyó positivamente en el desarrollo de su imagen conceptual de los objetos espaciales estudiados (rectas y planos) y de los conceptos relativos al paralelismo. Las manipulaciones con el programa de geometría dinámica 3-dimensional ayudaron al estudiante a eliminar las falsas imágenes que tenía al principio, a mejorar sus dibujos en papel de las estructuras 3-dimensionales y a crear una imagen conceptual mucho más rica y completa que la que tenía inicialmente.

Sería interesante realizar otras investigaciones, que completaran la información proporcionada aquí, para identificar momentos en los que el ordenador se pueda convertir en un obstáculo y en los que interese recurrir a materiales manipulativos que eviten o ayuden a superar tales dificultades. Estas investigaciones deberán aportar información para comparar los resultados de aprendizaje en tres entornos: solo con software de geometría dinámica 3-dimensional, con una combinación de materiales manipulativos y dicho software y, finalmente, solo con materiales manipulativos.

En cuanto al aprendizaje de los contenidos matemáticos, los diálogos sucedidos a lo largo de la experimentación muestran que el estudiante fue completando sus conocimientos a medida que mejoraban sus imágenes conceptuales de los conceptos estudiados. Sin embargo, todavía necesitaría realizar algunas actividades más para terminar de aprender las partes más complejas. Por ejemplo, las referentes a rectas situadas en planos paralelos (preguntas 17 y 18 del cuestionario y actividades 27 y 29). Por otra parte, estos diálogos muestran también que el estudiante progresó en su nivel de razonamiento afianzando su dominio del razonamiento de nivel 2 y empezando a realizar justificaciones deductivas abstractas propias del razonamiento de nivel 3.

Como se ha podido observar en los diálogos de algunas actividades, el investigador-profesor realizó intervenciones en momentos adecuados para centrar la atención del estudiante en las propiedades que se estaban poniendo de relieve pero que el estudiante no conocía suficientemente bien, y para inducir su aprendizaje de esas propiedades. Esto parece indicar que un entorno de enseñanza mediante un programa de geometría dinámica en el que los estudiantes trabajen de forma autónoma no podrá producir resultados tan positivos como otro entorno en el que los estudiantes interactúen con el profesor. No obstante, es necesario tener en cuenta que el experimento de enseñanza que hemos realizado, con un solo estudiante de altas capacidades matemáticas, está muy alejado de la realidad de una clase ordinaria de educación secundaria obligatoria, lo cual se puede considerar como una limitación de nuestro estudio. Por este motivo, puede ser un objetivo de investigaciones futuras explorar la creación de un entorno de geometría dinámica 3-dimensional que incorpore un sistema experto que sea capaz de reaccionar ante determinadas respuestas o concepciones más frecuentes de los estudiantes, lo cual le permitiría al profesor prestar más atención a otras dificultades de aprendizaje más complejas de sus alumnos.

El estudiante que participó en esta investigación, dotado de altas capacidades matemáticas, puso de relieve su talento en diversas ocasiones a lo largo de la experimentación. El estudiante mostró varias de las características que hemos enumerado en la descripción del marco teórico, como las capacidades o habilidades de utilizar razonamiento espacial, de establecer relaciones entre conceptos u objetos geométricos muy distintos, de generalizar y transferir conocimientos de contextos conocidos a otros nuevos, de acortar los procesos de resolución aludiendo a problemas similares resueltos antes, o de expresarse verbalmente con corrección superior a lo normal.

Una limitación del estudio que hemos presentado es que sus resultados no se pueden utilizar para prever respuestas de estudiantes con capacidades matemáticas medias. Sin embargo, la característica de superdotación del estudiante de nuestro experimento nos permitirá valorar la utilidad del entorno de aprendizaje que hemos creado para atender las necesidades de aprendizaje diferenciadas de estudiantes de distintas capacidades o motivaciones matemáticas. Un objetivo de investigación más amplio, en el que estamos trabajando, consiste en diseñar entornos de aprendizaje para aulas ordinarias que contengan actividades matemáticas ricas y variadas que sean capaces de motivar a estudiantes de diferentes capacidades matemáticas y de permitir a cada estudiante avanzar a su ritmo y llegar tan lejos en el aprendizaje como pueda.

Por otra parte, vemos interesante la posibilidad de continuar esta investigación repitiendo la experimentación con estudiantes de diferentes capacidades matemáticas, medias y altas, para comparar los comportamientos de unos y otros estudiantes.

AGRADECIMIENTO

La investigación presentada es parte de las actividades de los proyectos de I+D+i Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de Educación Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas (EDU2012-37259) y Momentos clave en el aprendizaje de la geometría en un entorno colaborativo y tecnológico (EDU2011-23240), subvencionados por el Gobierno de España.

REFERENCIAS

Accascina, G. y Rogora, E. (2006). Using Cabri3D diagrams for teaching geometry. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 13*(1), 11-22.

Alba, F. J. (2012). *Dificultades de interpretación y de uso de los arrastres en Cabri 3D por estudiantes de ESO*. Memoria de trabajo de fin de Máster. Documento no publicado. Universidad de Valencia, España.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F. y Robutti, O. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjecturs to proofs in geometry. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 32-39). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Baki, A., Kosa, T. y Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology, 42*(2), 291-310.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Baldin, Y. Y. (2008). *Some considerations about the preparation of teachers to use dynamic geometry software as didactical tool in spatial geometry*. Comunicación presentada en el grupo de discusión DG27 del International Congress on Mathematical Education ICME 11, Monterrey, México.

Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA: NCTM.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Nueva York, NY: MacMillan y NCTM.

David, M. M. y Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 413-431.

Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch y M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia MERGA* (pp. 219-226). Sydney, Australia: MERGA.

El-Demerdash, M. E. A. (2010). *The effectiveness of an enrichment program using dynamic geometry software in developing mathematically gifted students' geometric creativity in high schools* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Karlsruhe, Alemania.

Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Cáceres, M. (1992). *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* Memoria de proyecto de investigación no publicada. Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo", Valencia, España.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between Van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology, 18*, 31-48.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: Universitat de Valencia.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1993). An analysis of the students' use of mental images when making or imagining movements of polyhedra. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (Vol. 2, pp. 153-160). Tsukuba, Japón: Universidad de Tsukuba.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria.*

Cuestiones desde la Educación Matemática (pp. 143-170). Granada, España: Comares.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2/3), 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251.

Güven, B. y Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 7*(4), 100-107.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft cabri constructions. En N. Tadao y K. Masataka (Eds.), *Proceedings of the 24th International Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (Vol. 1, pp.103-117). Hiroshima, Japón: Universidad de Hiroshima.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 295-384). Sevilla, España: Alfar.

Laborde, C. (2005, Diciembre). *Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments*. Trabajo presentado en la *10th Asian Technology Conference in Mathematics*, Corea.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Sträesser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Mackrell, K. (2006). Cabri 3D: potential, problems and a web-based approach to instrumental genesis. En C. Hoyles, J. Lagrange, L. Son y N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the 17th ICMI Study Conference "Technology revisited"* (Vol. 2, pp. 362-369). Hanoi, Vietnam: Hanoi Institute Technology.

Mammana, M. F., Micale, B. y Pennisi, M. (2010). Analogy and dynamic geometry software together in approaching 3d geometry. En J. L. Galán, G. Aguilera y P. Rodríguez (Eds.), *Proceedings of the Conference on Technology and its Integration into Mathematics Education* TIME 2010 (pp. 1-14). Málaga, España: ETSI Telecomunicaciones e Informática.

Mariotti, M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 257-281.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 87-125.

McClintock, E., Jiang, Z. y July, R. (2002). Students' development of three-dimensional visualization in the Geometer's Sketchpad environment. En D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the 24th PME-NA Conference* (pp. 739-754). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Mithalal, J. (2010a). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* [Reconstrucción instrumental y reconstrucción dimensional en el contexto de la geometría dinámica tridimensional] (Tesis doctoral no publicada). Université de Grenoble, Francia.

Mithalal, J. (2010b). 3d geometry and learning of mathematical reasoning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME-6* (pp. 796-805). Lyon, Francia: INRP.

Owens, K. y Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 83-115). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 79-92.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques [Elementos para una aproximación instrumental en Didáctica de la Matemática]. En M. Bailleul (Ed.), *Actes de la 10e Université d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 203-213). Houlgate, Francia: IUFM de Caen.

Rabardel, P. (2002). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains* [El hombre y la tecnología. Una aproximación cognitiva a los instrumentos contemporaneous]. París, Francia: Armand Colin.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Roberts, D. L. y Stephens, L. J. (1999). The effect of the frequency of usage of computer software in High School geometry. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 18*(1), 23-30.

Sack, J. J. (2013). Development of a top-view numeric coding teaching-learning trajectory within an elementary grades 3-D visualization design research project. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 183-196.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interaçao com Cabri 3D: um estudo de transformaçoes geométricas no espaço [Génesis instrumental e interacción con Cabri 3D: un studio de transformaciones geométricas en el espacio]* (Tesis doctoral no publicada). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Tatsuoka, K. K., Corter, J. E. y Tatsuoka, C. (2004). Patterns of diagnosed mathematical content and process skills in TIMSS-R across a sample of 20 countries. *American Educational Research Journal, 41*(4), 901-926.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Ángel Gutiérrez
Universidad de Valencia
angel.gutierrez@uv.es

Adela Jaime
Universidad de Valencia
adela.jaime@uv.es