

## VISUALIZACIÓN DINÁMICA EN PROBLEMAS DE CÁLCULO UNIVERSITARIO, UN ESTUDIO

### SOBRE VISUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS

Lianggi Espinoza Ramirez, Estelita García  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,  
Cinvestav-IPN  
leanggi@gmail.com, egarcia@cinvestav.mx  
Campo de investigación: Visualización

Chile, México

Nivel:

**Resumen.** *La presente investigación es una continuación de nuestras indagaciones sobre la visualización en matemáticas. En esta ocasión damos evidencia de un tipo de visualización necesaria para abordar los problemas de cálculo universitario, que hemos llamado visualización dinámica. La caracterizamos en base a la producción y uso de ciertos grafismos, que llamamos grafismos abstractos. Esta visualización permite al lector tener un grado de independencia de la información mostrada que le permite manipularla con un fin de comprensión. Fundamentamos el por qué de la investigación en nuestra una postura epistemológica sobre el rol de la visualización en la construcción del conocimiento matemático. Nuestra aspiración es aportar elementos a un marco referencial que nos permita estudiar los fenómenos producidos por la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje.*

**Palabras clave:** visualización, visualización dinámica, gráficas, cálculo universitario

### Antecedentes

En la actualidad la visualización tiene una importancia de magnitudes en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sin embargo esto no siempre ha sido así. Descartes, Leibnitz, Gauss y otros han reconocido la importancia de la visualización en el desarrollo de la matemática. Pero en el siglo XX hubo una ruptura al respecto. El formalismo de esta época la desacreditó fuertemente, considerándola como insegura y poco formal. Esto influyó en desmedro de su utilización en la difusión científica y escolar. A estos sucesos históricos subyacen diferentes perspectivas sobre el estatus epistemológico que tiene la visualización en la producción del conocimiento matemático. Las gráficas se pueden considerar como meras representaciones de cierto concepto matemático o como elementos que median o permiten su producción. La perspectiva considerada incidirá fuertemente en como entenderemos los fenómenos producidos por la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Entendemos por visualización en matemáticas (VEM) al proceso de elaboración de imágenes mentales y el uso de tales para la comprensión en matemáticas (Zimmermann y Cunningham, 1991). Por tanto la visualización es un proceso mental y lo visible de este proceso es la ostensión

1023

de tal proceso, la cual puede ser evocada mediante algún tipo de grafismo (gráfica matemática, bosquejo gráfico, dibujo, escrito o fórmula), como también por el lenguaje o los gestos de cierto sujeto (Bosch, 1994). El planteamiento epistemológico de Bosch (1994) consiste en que la relación entre el proceso mental y su ostensión es dialéctica, por lo cual los grafismos son parte sustancial de la producción del conocimiento.

Un trabajo que nos parece revelador al respecto es el de Laborde (2004). Ella muestra lo ilusorio de considerar los pensamientos teóricos de la geometría como distantes o apartados de los grafismos utilizados. En efecto, evidencia como un grupo de estudiantes, al resolver problemas de conjetura y demostración, mantienen un movimiento constante entre el dominio gráfico y el teórico. El punto es que este movimiento permanece oculto en las producciones que presentan a sus profesores por el contrato didáctico implícito que considera como argumentación correcta solamente aquellas que aluden a planteamientos teóricos. Por tanto, los grafismos no son simples representaciones de las ideas matemáticas, sino que estos modifican el pensamiento y la producción matemática, adquiriendo de esta manera un rol fundamental en la construcción del pensamiento matemático.

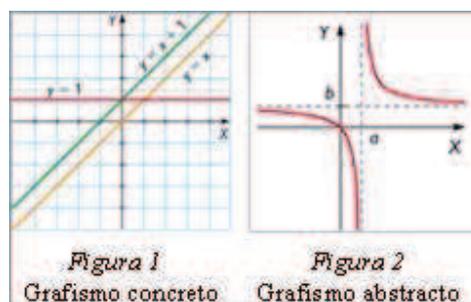
Con estos antecedentes nuestra línea de investigación está considerando a los grafismos no como meras representaciones de un objeto matemático preexistente, sino como elemento que forma parte en la producción del conocimiento, capaces de articular diferentes tipos de visualizaciones, las que a su vez inciden en cierta construcción matemática. De esto, la visualización es un elemento interviniente en la construcción del conocimiento matemático. Esto fundamenta la importancia de considerar a la visualización como objeto de estudio en la investigación en matemática educativa. Nuestra postura epistemológica del conocimiento es pragmática, en el sentido de que el significado dependerá de los usos, y por tanto el conocimiento no es preexistente ni estático; de aquí que preferimos utilizar la palabra grafismo en vez de representación gráfica.

Para nosotros, la visualización puede estar relacionada a dos acontecimientos: a la *producción* de cierto tipo de grafismos como ostensión de cierta visualización, al *uso* de cierto grafismo (producido o no producido por el individuo) con la intencionalidad de comprensión. En este segundo caso la visualización es más que una mirada superficial de tal grafismo, es una

observación profunda, detallada y analítica del mismo. Mayores detalles al respecto se pueden consultar en Espinoza (2007)

Nuestra intención es dar evidencia de un tipo de visualización especial y necesaria para abordar los problemas del cálculo universitario. Por esto reportamos en Espinoza (2007) dos tipos de grafismos diferentes entre sí, encontrados con naturalidad en libros de textos y en los apuntes de los profesores, que inciden diferentemente en la eficacia de los estudiantes al enfrentarse a ciertas tareas matemáticas. En aquella ocasión les nombramos como representaciones visuales no genéricas y genéricas, haciendo alusión a la abstracción que permiten los mismos en el pensamiento matemático. Ganando precisión, en esta ocasión les nombramos grafismos concretos y abstractos respectivamente, por considerar esta caracterización más relevante y clarificadora respecto a la idea tratada en esa ocasión.

Estos grafismos son de naturaleza diferente, pero viven en la enseñanza sin aparente diferencia. El primero presenta en un correlato exacto la situación matemática presentada y el segundo presenta una característica de esta (alguna propiedad, relación entre elementos o idea abstracta), sin expresar de manera exacta o literal la situación matemática abordada. Generalmente estos grafismos presentan parámetros.



A modo de ejemplo, la Figura 1 muestra de manera exacta un sistema de ecuaciones con sus respectivas intersecciones, en cambio la figura 2 muestra la ubicación relativa de una hipérbola, en donde los parámetros indican la forma de las asíntotas y su ubicación relativa, más no la ubicación exacta de la hipérbola (Espinoza, 2007, p.604).

El asunto relevante en esta ocasión es cuestionarnos sobre la existencia de cierto tipo de visualización necesario para poder visualizar plenamente estos grafismos abstractos, y en caso de su existencia mostrar evidencia de ello. Por esto nos planteamos como objetivo de investigación “evidenciar la existencia de algunos tipos de visualización en estudiantes de nivel superior vinculados a los grafismos concretos y abstractos, y su relación con la efectividad en la resolución de una tarea matemática de nivel universitario”

## Metodología

Para encontrar la evidencia decidimos estudiar a un grupo de estudiantes universitarios abordando un problema abierto de cálculo de alta complejidad, en donde podían utilizar tecnología (en este caso programas graficadores de funciones). El problema matemático escogido es el siguiente:

Sean  $x, y \in \mathbf{R}$ , demuestre que la ecuación  $x^y = y^x$

- a) Tiene solución.
- b) Tiene infinitas soluciones.
- c) Tiene únicamente dos soluciones  $(x, y)$  tal que  $x \neq y$ , con  $x, y \in \mathbf{N}$ .

Su elección se debe a la imposibilidad de despejar alguna variable en función de la otra, por lo cual se hace necesario considerar una de las variables como parámetro, lo que a su vez permite la producción y uso de grafismos abstractos.

Decidimos no estudiar la producción final, sino el proceso mediante el cual se aborda la tarea, por considerarlo más idóneo para evidenciar las visualizaciones de los estudiantes. Los datos son tomados de García (2008) e indagaciones paralelas. De estos datos consideramos finalmente dos relatos, a quienes llamamos ficticiamente Gustavo y Paula, hombre y mujer, ambos mexicanos de 24 y 23 años y licenciados en enseñanza de las matemáticas. Se tomó registro de audio, video y de sus producciones escritas. Con esto desarrollamos narrativas de sus producciones con la intencionalidad de evidenciar y caracterizar los tipos de visualizaciones presentes en cada uno de ellos. En el análisis de los datos consideramos, siguiendo la metodología descrita por Bosch (1994), las ostensiones realizadas por los estudiantes: los grafismos, el lenguaje y los gestos. Entenderemos que un alumno *visualiza dinámicamente* cuando es capaz de *producir y utilizar* grafismos abstractos. La metodología de análisis es cualitativa exploratoria.

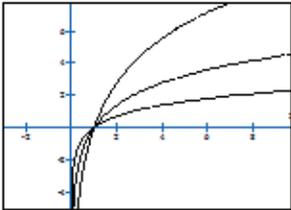
## Resultados

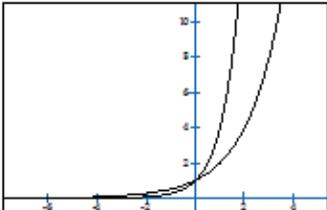
A modo de abreviación, la notación  $F-n$  se referirá a la figura número n.

1026

### El desarrollo de Gustavo

Gustavo inició su procedimiento realizando tanteo numérico, encontrando como solución del inciso a) la pareja (1, 1) y del inciso b) las parejas (x, y) tal que  $x = y$ . Al intentar demostrar la unicidad (inciso c)) asume como necesario un desarrollo analítico y gráfico. Primero intenta despejar una de las variables de la ecuación aplicando logaritmo natural F-3, y al no lograrlo grafica (con el software Graph) una familia de gráficas asociadas al logaritmo natural.

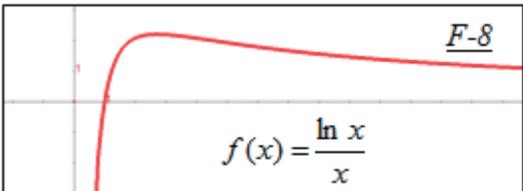
$$\begin{array}{l}
 x^y = y^x \\
 \ln x^y = \ln y^x \\
 y \ln x - x \ln y = 0
 \end{array}
 \quad \text{F-3}$$


$$\begin{array}{l}
 f(x) = 2^x \\
 f(x) = 4^x
 \end{array}
 \quad \text{F-4}$$


Posteriormente, observando la igualdad  $x^y = y^x$ , considera la variable  $y$  como un número natural que toma un valor particular en este dominio mientras que  $x$  varía en todos los reales, obteniendo funciones del tipo  $x^n$  y  $n^x$  F-4. Luego grafica pares de gráficas y observa el punto de intersección de estas. En este momento muestra gestos de incertidumbre, abandona esta idea y regresa a las ecuación F-5, la cual reescribió como F-6, e interpretó como una función de  $x$ , explicitando la condición de inyectividad F-7.

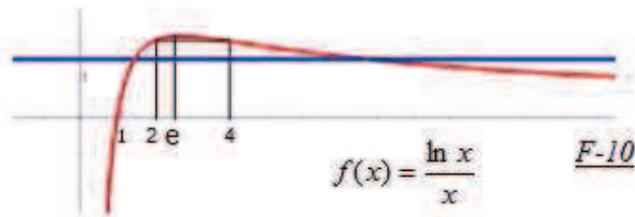
$$\begin{array}{l}
 \frac{y}{\ln y} = \frac{x}{\ln x} = cte \\
 \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \\
 f(x) = f(y) \quad \Bigg| \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{F-5} \\
 \text{F-6} \\
 \text{F-7}
 \end{array}$$

Continúa con esta idea y grafica la función  $f(x)$  F-8, y desarrolla el cálculo F-9



$$\begin{array}{l}
 f(x_1) = f(x_2) \\
 f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2)
 \end{array}
 \quad \text{F-9}$$

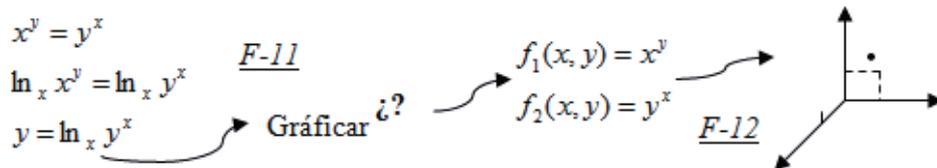
Después encontró el máximo de la función, y resolvió el problema, expresando gráficamente lo siguiente F-10:



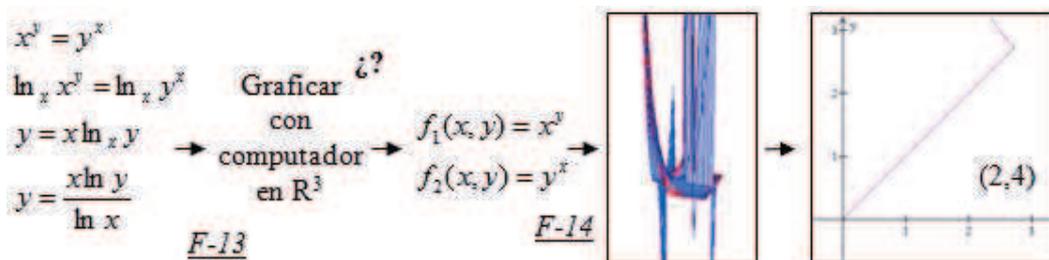
Al escribir su resultado, explico que [...] así que traté de trazar una recta y vi que si cortaba en dos puntos, por tanto lo que buscaba era un valor  $k$  de  $x$  entre el 1 y  $e$ , y el punto correspondiente a ese que tenía la misma altura, entonces llegué a la conclusión de que esos puntos si existían y existían varios [...] esto me llevó a justificar la solución única.

El desarrollo de Paula

Paula respondió rápidamente a los dos primeros incisos, dando como solución  $1^1 = 1^1$  y  $x^x = x^x$  a cada uno de ellos. Luego, al enfrentar la pregunta tres comenzó a desarrollar algebraicamente la ecuación utilizando leyes de logaritmo F-11, de lo cual intentó graficar en el plano, pero sin resultados por la complejidad de la ecuación. Después, intentó graficar las funciones descritas en dos variables F-12, pero logro solamente realizar bosquejos de puntos de ellas en  $\mathbb{R}^3$



Ante este fallido intento regresó a la ecuación original y nuevamente comenzó a despejar usando propiedades de logaritmos, llegando a una nueva expresión, la cual intentó graficar con el computador en  $\mathbb{R}^3$  (Winplot 2.0) F-13. Ante la imposibilidad de observar algo claro escribió otras ecuaciones F-14, las graficó en  $\mathbb{R}^3$  y graficó su intersección en el plano, encontrando de esta manera la solución entera (2,4).



Luego, ante la dificultad mostrada por sus gestos para utilizar la gráfica en  $\mathbf{R}^3$  (pues el software se bloqueaba al graficar estas ecuaciones), regresó nuevamente a la ecuación original y volvió a despejar usando reglas de logaritmos F-15, obteniendo una nueva expresión para resolver el problema, en la cual verificó numéricamente el resultado encontrado F-16.

$$\begin{array}{l} \text{F-15} \quad x^y = y^x \\ y = x \ln_x y \\ y = \frac{x \ln y}{\ln x} \end{array} \quad \frac{y}{\ln y} = \frac{x}{\ln x} \quad \text{F-16} \quad \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4}$$

Después de esto, al intentar demostrar la unicidad, manifestó lo siguiente: *sé que se podría demostrar por contradicción, se que se podría*, sin embargo, al intentarlo comenzó a mostrar mayores compilaciones con sus cálculos, y su insistencia en utilizar gráficas en  $\mathbf{R}^3$  hacía que sus razonamientos se complicaran cada vez más. En este momento sus gestos mostraban frustración, y estuvo en esta situación por más de una hora. En este momento se decidió realizar una intervención del investigador para tener más información. El relato es el siguiente:

- Investigador: *¿Y por qué no graficas en 2D?* (haciendo alusión a la ecuación en F-16)
- Paula: *Necesitaría usar paramétricas, buscar expresarlo en t con senos y cosenos.*
- [...] Investigador: *¿Por qué no te ayudas de una gráfica en 2D mejor?*
- Paula: *La gráfica no me dice algo porque no logro ver la gráfica completa, no siento que me ayude la gráfica.*

### Discusión

En un comienzo Gustavo no podía determinar si la igualdad inicial era una ecuación o una función. Esto no fue obstáculo para que realizara grafismos en los que representó cierto tipo de dinamismo F-3. El considerar  $f(y)$  como parámetro fue vital para resolver el problema F-5 F-7 F-10. Se evidencia la *producción* de un grafismo abstracto F-10, pues la intersección entre la recta horizontal y la función representa dos pares de puntos con la misma imagen, y no los puntos dibujados. Se evidencia que al demostrar la unicidad de la solución *usa* esta gráfica

dinámicamente F-10, pues observó la recta horizontal “moviéndose” en el rango  $]0, f(e)[$ , poniendo atención en las intersecciones de la recta y la función. En síntesis, tuvo *producción* de grafismos abstractos y los *uso* dinámicamente.

Paula, en cambio, no evidenció producción de grafismos abstractos y mostró limitaciones en visualizar dinámicamente. Mostró dificultades al intentar despejar las variables. En esto no pudo visualizar una de estas como parámetro F-11 F-13 F-15. En todo momento intento realizar grafismos concretos que presentaran exactamente la situación matemática. Esto se evidencia en la insistencia de usar gráficas en  $\mathbb{R}^3$  F-12; F-13; F-14; F-15. La intervención del investigador hizo evidenciar la imposibilidad de utilizar grafismos abstractos “la gráfica no me dice algo porque no la veo completa”, “necesitaría usar paramétricas”. Esto muestra su incapacidad de visualizar propiedades o relaciones en el grafismo, esto es, realizar una visualización dinámica. Su tipo de visualización que denominamos *visualización estática* le permitió encontrar la solución, pero no resolver completamente el problema.

## Conclusiones

Hemos dado evidencia de un tipo de visualización especial, que llamamos *visualización dinámica*, necesaria para afrontar un problema de cálculo universitario. Este tipo de visualización se evidencia en la *producción* y *utilización* de grafismos abstractos. El alumno que produjo y utilizó grafismos abstractos mostró capacidad y destreza para elaborar y probar conjeturas, con lo cual resolvió el problema. La alumna que no evidenció producción de grafismos abstractos y que mostró dificultad para visualizar dinámicamente llegó a una etapa de frustración por no poder abordar el problema. De esto consideramos que heurística necesaria para abordar el problema se sustenta en poder visualizar dinámicamente. Otro aspecto relevante es que esta alumna que no visualizó dinámicamente es licenciada en enseñanza de las matemáticas. Considerando además los grafismos utilizados en las matemáticas universitarias (Zimmerman y Cunningham, 1991), concluimos que la visualización dinámica es necesaria para abordar muchos problemas de cálculo y que la capacidad de visualizar dinámicamente no es trivial ni natural, y que no se encuentra necesariamente en todos los alumnos universitarios. El desafío para la investigación ahora es entender como se puede desarrollar esta manera de visualizar en matemáticas.

Esta investigación también complementa los resultados de (Espinoza 2007). Un factor relevante en la mediación de los grafismos en la comprensión es la manera de visualizar que tienen los estudiantes. En este caso el potencial encontrado de los grafismos abstractos en la resolución de la tarea matemática planteada en esa ocasión esta condicionada a la necesidad de visualizar dinámicamente, que en este contexto implica que el lector pueda tener cierto grado de independencia de la información mostrada y pueda manipularla con la intención de la comprensión en matemáticas.

### Referencias bibliográficas

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Espinoza, L. (2007). Diferencias en la comprensión de las traslaciones para distintos tipos de representaciones visuales. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.), *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 603- 614). Red de Cimates. México.

García, E. (2008). *El uso del conocimiento matemático asociado a la función en la producción institucional, el caso de investigadores en formación de matemática educativa*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Laborde, C. (2004). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, c. Hoyles and O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education*, (pp. 1-21). Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? In: Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 1-8.