CALCULO DE ÁREAS PLANAS EN R^2 USANDO LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

José Juan Contreras Espinosa, José Luz Hernández Castillo, Armando Aguilar Márquez, Frida Ma. León Rodríguez, Carlos Oropeza Legorreta
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM México
jjuancon@correo.unam.mx, joselo26@servidor.unam.mx

Resumen. - En la enseñanza de las matemáticas y en particular del cálculo diferencial e integral, el profesor busca que los conceptos correspondientes se puedan entender por los alumnos a través de ejemplos sencillos al principio, propone varias estrategias para encontrar la solución de un problema, trata de motivar a los estudiantes y de proporcionar ejemplos de aplicación. En varias de las asignaturas de matemáticas para estudiantes de ingeniería, un aspecto fundamental al analizar un tema en particular es usar al menos tres formas de representar un concepto: El aspecto analítico, el geométrico y el tabular. En el presente trabajo se muestra una estrategia alternativa complementaria para estudiar el concepto de la integral definida haciendo uso de software matemático.

Palabras clave: – maple, áreas, rectángulos, integral definida.

Abstract. - Teachers look for that the appropriate concepts that can be understood by students through simple examples in the beginning of mathematics' teaching, especially in Differential and integral calculus; they suggest various strategies in order to find the solution for the problem, try to motivate the students and to provide applicable examples. In several fields of mathematics for engineering's students, a fundamental aspect to analyze a specific issue is to use at least three ways to represent a concept: the analytical side, the geometric and the tabular. The present work demonstrates a complementary alternative strategy to study the concept of the definite integral using mathematics' software.

Key words: - maple, areas, rectangles, defined integral.

Introducción

Antecedentes

Reconociendo según Dreyfus (1990), quién afirma que "los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo (encontrar límites, diferenciación, etc.) a un nivel puramente algorítmico, construido sobre imágenes conceptuales escasas. Y que las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos de que los estudiantes carecen, necesariamente, de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto) como de los procesos de aproximación".

La comprensión de los conceptos básicos del Cálculo suele resultar una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes en sus primeras experiencias en esas asignaturas. Algunas de estas dificultades han sido documentadas sistemáticamente en diferentes regiones del mundo y bajo el abrigo de diversas perspectivas teóricas (Orton, 1983; Artigue, 1998 y Cantoral, 2000), en

Cabañas y Cantoral (2007). Específicamente, diferentes investigaciones muestras que los estudiantes tienen dificultades con la conceptualización de los procesos de integración y que estas se refieren al desequilibrio existente entre lo conceptual y lo algorítmico. De ahí que se coincide con quienes afirman que, bajo el influjo del discurso matemático escolar, la enseñanza del Cálculo Integral privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de integración en detrimento propiamente de la comprensión de nociones básicas, como se señala en (Quezada, 1986; Artigue, 1998; Cantoral, 2000), en Cabañas y Cantoral (2007).

Por otra parte, como ha sido reconocido, la enseñanza de las aplicaciones en Cálculo Integral es un tópico sumamente amplio. Sin embargo, una de las más utilizadas por los profesores es el cálculo de áreas planas debido a la flexibilidad que se tiene de su representación, en el pasado (aunque en algunos casos en el presente) dicho tema principalmente era cubierto con el apoyo de gráficas en láminas o directamente en el pizarrón, en donde se mostraban las gráficas dividiendo el área o la región buscada desde una pequeña cantidad de rectángulos hasta una cantidad muy amplia haciendo la suma de ellos de forma manual y con la suma también a través de algunas fórmulas que conducen a su solución del Cálculo Integral.

El desarrollo del presente trabajo se fundamenta a partir de la experiencia respaldada por la labor de más de una década de profesores adscritos al departamento de matemáticas en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, se ha llegado al consenso de estudiar la naturaleza de algunos de los conceptos que se abordan, dentro de los que se incluyen ejemplos de integrales con las soluciones correspondientes y de manera implícita se pretende que los estudiantes puedan transitar a través de la representación analítica, grafica, y tabular, promoviendo con ello se reconozcan sus características, las dificultades inherentes con el transito de las representaciones, compartan sus experiencias, discutan las ventajas o no que la computadora y el software especializado les puede ofrecer, etc. Este proceso ha permitido una mejora en la adquisición de los conceptos y de la interpretación del cálculo de áreas por parte de los estudiantes.

Actualmente algunos alumnos del área de las ingenierías que estudian en la facultad se encuentran en contacto permanente con los avances científicos y tecnológicos a través del uso frecuente de diversos software lo que les ha permitido ampliar sus oportunidades de desarrollo y de esta manera proporcionar una alternativa que les brinde una manera más rápida y eficiente de corroborar sus respuestas comparándolas así con los métodos convencionales.

Objetivo

Encontrar el área bajo la curva de tres formas distintas: rectángulos izquierdos, rectángulos medios y rectángulos derechos, como una propuesta alternativa de comprensión en el estudio del tema referido.

Desarrollo

La propuesta planteada en el trabajo consiste en que los estudiantes encuentren el área bajo una curva, limitada por dos rectas verticales y una horizontal que coincide con el eje de las abscisas; se presenta la solución de varias formas para encontrar el área de una manera aproximada, dividiéndola en cinco rectángulos y colocándolos en distintas posiciones, para posteriormente calcularla con una mayor precisión y comparar con los resultados previos para concluir de que forma se tiene menor error; todas las soluciones se encuentran a través de un proceso analítico apoyándose del software matemático Maple. Por último, se les solicita hacer una demostración gráfica con animación para el cálculo del área correspondiente a través del mismo software.

Por cuestiones de espacio se decidió presentar a continuación una respuesta general de la solución gráfica de un ejemplo en específico, en este caso la solución hace uso de las nuevas tecnologías a través del software matemático Maple.

Ejercicio. Calcular el área bajo la curva $y = x^2 + 1$ definida en $x \in [0,5]$ usando 5 rectángulos. Izquierdos, medios y derechos. Realizar un planteamiento analítico, gráfico y tabular.

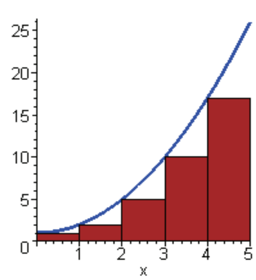
En el siguiente desarrollo usando el software matemático Maple, se presenta la parte correspondiente a los rectángulos izquierdos.

[> restart:with(plots):with(linalg):with(student):

Gráfica de los rectángulos izquierdos. El área es menor que la real.

[> ri:=leftbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=brown):

[> ri;



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos izquierdos.

Suma de los rectángulos izquierdos.

[> leftsum(x^2+1,x=0..5,5); $\sum_{i=0}^{4}(i^2+1)$

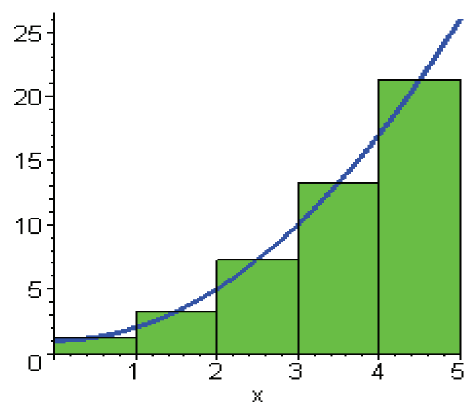
[> value(%); 35

Maple inicia la suma en i = 0 debido a que es el punto inicial donde el primer rectángulo toca a la curva en la parte superior izquierda.

A continuación se presenta la gráfica de los rectángulos medios, el área es ligeramente menor que la real (es la mejor aproximación debido a que se equilibra al compensarse los errores por abajo y por arriba de la curva).

[> rm:=middlebox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=green):

[> rm;



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos medios.

Suma de los rectángulos medios.

[> middlesum(x^2+1,x=0..5,5); $\sum_{i=0}^{4}\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)$

[> value(%); $\frac{185}{4}$

[> evalf(%); 46.25000000

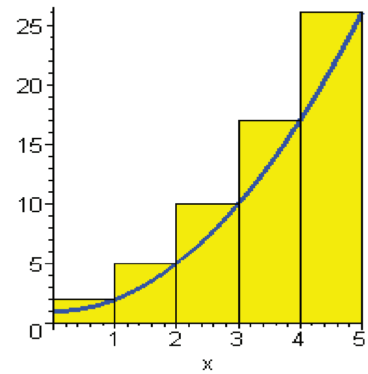
Nota: Maple inicia la suma en i = 0 debido a que es el punto donde inicia el área del primer rectángulo, la curva toca al primer rectángulo en la parte superior media en x = 0.5.

En esta última parte del cálculo del área con el software matemático Maple, se presenta lo correspondiente a los rectángulos derechos.

Gráfica de los rectángulos derechos, el área es mayor que la real.

[> rd:=rightbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=yellow):

[> rd;



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos derechos.

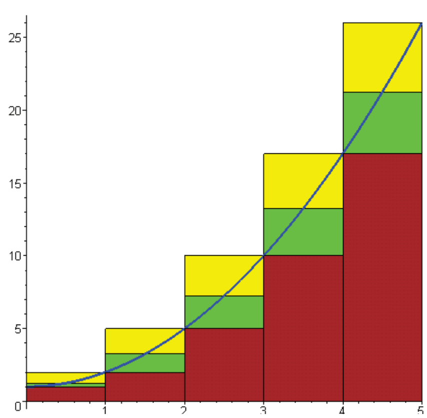
Suma de los rectángulos derechos.

[> rightsum(x^2+1,x=0..5,5); $\sum_{i=1}^{5} (i^2 + 1)$

[> value(%); 60

En la gráfica siguiente, se muestran los tres tipos de rectángulos en el mismo plano cartesiano de referencia, en donde se puede observar claramente que el cálculo del área a través de los rectángulos medios es la que tiene menor error.

[> display(ri,rm,rd);



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos izquierdos, medios y derechos.

[> 35 < 46.25 and 46.25<60;

true

35 < 46.25 < 60; *ri* < *rm* < *rd*.

A continuación se obtiene el área real.

[> Int(x^2+1,x=0..5)=int(x^2,x=0..5); $\int_0^5 x^2+1\,dx = \frac{140}{3}$

[> lhs(%)=evalf(rhs(%)); $\int_0^5 x^2+1\,dx = 46.66666667$

Cálculo del área de los tres tipos de rectángulos. Paso a paso.

Suma de los rectángulos izquierdos.

[> f:=x->x^2+1:f(0)*1+f(1)*1+f(2)*1+f(3)*1+f(4)*1; **35** # Evaluando en la función.

[>(0)^2*1+1+(1)^2*1+1+(2)^2*1+1+(3)^2*1+1+(4)^2*1+1; **35** # Sustituyendo y evaluando en la función.

[> 1+2+5+10+17; **35** # Desarrollando las operaciones del paso previo.

Suma de los rectángulos medios.

[> f:=x->x^2+1:f(1/2)*1+f(3/2)*1+f(5/2)*1+f(7/2)*1+f(9/2)*1; **185/4** # Evaluando en la función.

[> (1/2)^2*1+1+(3/2)^2*1+1+(5/2)^2*1+1+(7/2)^2*1+1+(9/2)^2*1+1; **185/4** #

Sustituyendo y evaluando en la función.

[> 5/4+13/4+29/4+53/4+85/4; **185/4** # Desarrollando las operaciones del paso previo.

46.25000000

[> evalf(%);

(5 + 13 + 29 + 53 + 85)/4 = 185/4 = 46.25

Suma de los rectángulos derechos.

[> f:=x->x^2+1:f(1)*1+f(2)*1+f(3)*1+f(4)*1+f(5)*1; **60** # Evaluando en la función.

[> (1)^2*1+1+(2)^2*1+1+(3)^2*1+1+(4)^2*1+1+(5)^2*1+1; **60** # Sustituyendo y evaluando en la función.

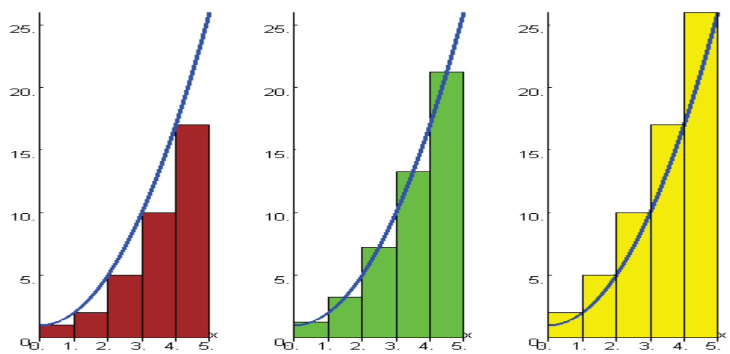
[> 2+5+10+17+26; **60** # Desarrollando las operaciones del paso previo.

35 < 46.25 < 60; *ri* < *rm* < *rd*.

En resumen área de los rectángulos izquierdos es menor al área de los rectángulos medios menor a área de los rectángulos derechos.

Visualizando los tres tipos de rectángulos en la misma lámina para hacer un análisis comparativo complementario a la gráfica anterior.

```
[> A:=array(1..3):
A[1]:=leftbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=brown):
A[2]:=middlebox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=green):
A[3]:=rightbox(x^2+1,x=0..5,5,color=blue,thickness=3,shading=yellow):
display(A);
```



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$ con 5 rectángulos izquierdos, medios y derechos.

Animación del área bajo la curva

En esta parte se lleva a cabo el desarrollo a través del software matemático maple, en el que se ilustra la animación del área bajo la curva haciendo uso de los rectángulos medios que corresponden a la suma de Riemann con un total de 50 rectángulos, lo que permite visualizar el área con una exactitud muy aproximada a la real.

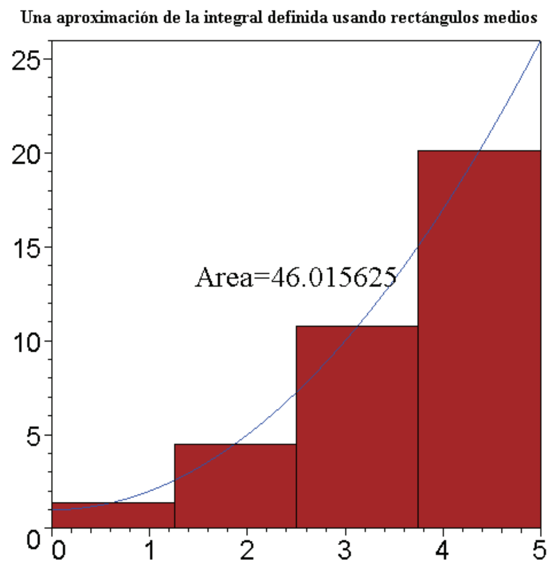
```
[> restart:with(student):with(plots):
[>setoptions(labels=["",""],axesfont=[HELVETICA,18],font=[TIMES,ROMAN,20],
  axes=boxed,title="Una aproximación de la integral definida usando rectángulos medios",
  titlefont= [TIMES, BOLD,12]):
[> f:=x->x^2+1:
[> a:=0:b:=5:
[> f_min:=minimize(f(x),x=a..b):
[> f_max:=maximize(f(x),x=a..b):
```

[> MidGraf:=(a+b)/2,(f_min+f_max)/2:

[>Rectángulos:=display(seq(middlebox(f(x),x=a..b,NumRects,shading=brown,color=blue,
thickness=3),NumRects=4..50),insequence = true):

[>Area:=display(seq(textplot([MidGraf,sprintf("Area=%f",middlesum(f(x),x=a..b,
NumRects))]),NumRects=4..50),insequence=true):

[> display(Rectángulos,Area);



Gráfica de $y = x^2 + 1$, $x \in [0,5]$.

Un comentario para reflexionar

Entre otros, uno de los aspectos fundamentales por destacar en este punto abordado es la animación del área bajo la curva, los estudiantes distinguen con claridad la diferencia que se establece cuando se implementan los métodos que hacen uso de las nuevas tecnologías en contraste con los métodos convencionales. También se ha detectado que en su mayoría los alumnos tienden ha interesarse ampliamente en el uso del software matemático, echo que provoca una actualización permanente por parte de los profesores, así como la adquisición e instalación de las versiones más recientes del mismo utilizado en el laboratorio de computo.

Conclusiones y recomendaciones

En la solución del problema, el área encontrada con rectángulos izquierdos es menor que la real en virtud de que el error que se comete con este tipo de estructura y número de rectángulos es alto.

Así mismo, el área encontrada con rectángulos medios es ligeramente menor que la real, ya que el error generado con esta estructura se equilibra en gran medida al tomar errores por abajo y por arriba de la curva.

El área encontrada con rectángulos derechos es mayor que las dos anteriores y que el área real o la más aproximada en virtud de que el error que se comete con este tipo de estructura y número de rectángulos es alto.

Comparando las áreas se tiene que: El área de los rectángulos izquierdos es menor que el área de los rectángulos medios y esta a su vez es menor que el área de los rectángulos derechos.

Por lo antes expuesto, el método o la forma más recomendada por su precisión es la señalada como rectángulos medios, tomando como base las sumas de Riemann.

Referencias bibliográficas

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). *La integral definida: un enfoque socioepistemológico*. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López & C.

Dolores, C. (2005). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. Guerrero, México: Ediciones Díaz de Santos.

Dreyfus, T. (1990). *Advanced Mathematical Thinking.* In Nesher, P. And Kilpatrick, J. (Ed.). Mathematics and Cognición: a Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Educations (pp.113-134).Cambrige University Press.

Larson Hostetler. *Cálculo 1*. 12va, Ed. Mc Graw Hill. 2010. México.

Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* (pp. 3-25). Guerrero, México: Ediciones Díaz de Santos.

Pursell J. Edwin. *Cálculo.* 9va. Ed. Pearson Educación, 2007, México.

Stewart J. *Cálculo Trascendentes Tempranas.* 4a, Ed. CENGAGE, 2008, México.

Thomas Finney. *Cálculo de una Variable*. 10ma. Ed. Pearson Educación. 2010. México.