

## MODOS DE ACCIÓN Y DECISIONES DE LOS DOCENTES. UN EJEMPLO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD

Inocencia Espinoza, Carlos Rondero, Ana Tarasenko

Universidad Politécnica de Francisco I. Madero, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

México

[espinozainocencia@hotmail.com](mailto:espinozainocencia@hotmail.com), [rondero@uaeh.edu.mx](mailto:rondero@uaeh.edu.mx), [anataras@uaeh.edu.mx](mailto:anataras@uaeh.edu.mx)

**Resumen.** En esta investigación se pretende mostrar que el teorema de Pitágoras es un eje articulador transversal de saberes matemáticos, dado que posibilita el relacionar conceptualmente la matemática básica con la matemática avanzada, esto particularmente referido en los niveles educativos básico y medio superior. Se parte de la realización de un análisis de histórico-epistemológico del teorema, para dar evidencias acerca de la relevancia de este saber sabio en un gran número de asignaturas de la matemática escolar.

**Palabras clave:** teorema de Pitágoras, articulación conceptual, epistemología.

**Abstract** This research aims to show that the Pythagorean Theorem is a coordinating cross-mathematical knowledge, since conceptually possible to relate basic math to advanced math, this particularly referred to in the primary and secondary educational levels higher. It is part of the realization of a historical-epistemological analysis of the theorem, to give evidence about the relevance of this knowledge learned in a large number of subjects in school mathematics.

**Key words:** Pythagorean Theorem, conceptual articulation, epistemology

### Introducción

Se parte de la premisa de que el teorema de Pitágoras puede ser considerado como un saber sabio, dado que su estatus epistemológico se remonta a algunas de las culturas ancestrales tales como la egipcia, china y mesopotámica. Sin embargo, desde su presentación por primera vez en el escenario escolar correspondiente al tercer año de secundaria, este saber es tratado con mucha superficialidad conceptual que se ve reducida al enunciado del teorema asociándosele con los lados de un triángulo rectángulo, dejando de lado el sustento histórico – epistemológico, lo cual conlleva implicaciones en su aprendizaje.

Desde la perspectiva de este trabajo, al teorema de Pitágoras es un elemento de articulación conceptual, en el sentido que señala Rondero (2006),

La articulación es el conjunto de etapas dispuestas de manera coherente en relación a un objetivo de aprendizaje, en donde las condiciones de ésta no son sin duda fáciles de establecer.

Una característica adicional del teorema es el hecho relevante de que es un instrumento fundamental e indispensable para estructurar y entender otros conceptos de geometría, trigonometría, geometría analítica y cálculo, como es el caso de: la deducción de identidades trigonométricas; desarrollo de las ecuaciones de cónicas, el cálculo de longitud de curva, método de integración por sustitución trigonométrica y las

representaciones paramétricas de curvas y superficies, entre otras, además de otros saberes que se manejan en diferentes áreas de la matemática y de la física. Sin embargo, a pesar de su trascendencia epistemológica, su presentación en la didáctica es muy pobre, dado que casi siempre se reduce, al menos en la matemática escolar de nivel básico, al enunciado del teorema y como regla memorística, desprovéyéndolo así de su esencia conceptual.

### Marco teórico

Siguiendo a la epistemología genética, se puede señalar que el desarrollo del pensamiento de la tesis Piagetiana indica que el conocimiento se construye a medida que se interacciona con la realidad, sobre esquemas donde el individuo puede actuar, en la generación de los conocimientos matemáticos, en el caso del teorema de Pitágoras se requiere que primero se genere una adecuada asimilación y una acomodación del mismo dado su papel preponderante que tiene dentro de la gama de conceptos fundamentales que el alumno debe aprender en secundaria, para luego poder aplicarlo en el bachillerato y por supuesto en el nivel superior.

Desde otro enfoque Wertsch (1988), afirma que Vygotsky, considera al conocimiento como el producto de la interacción social y cultural, es decir que todo se deriva de un producto social y considerando que el Teorema de Pitágoras se va aprendiendo de generación en generación, y en diferentes culturas como una necesidad social, por medio de la comunicación, el lenguaje y los razonamientos y además por la generación de procesos en forma interpersonal e intrapersonal, es decir intervienen tanto el aspecto social como el individual.

En matemáticas no podemos hablar de objetos reales por este motivo es importante identificar, como se ha teniendo la necesidad de crear específicamente los objetos matemáticos que no son algo tangible, esto nos lleva a la necesidad de tener que hacer representaciones de estos objetos, con la finalidad de ampliar y tener mejores herramientas que han ayudado a plasmar el entorno desde una perspectiva matemática. Se tiene entonces la necesidad de contar con los conceptos desarrollados por Duval(1999) *con su teoría de representaciones semióticas y la articulación de registros*, debido a que uno de los objetivos de la investigación es dar a conocer el aspecto articulador del Teorema de Pitágoras en la educación matemática en los niveles de secundaria y bachillerato.

Chevallard en su teoría de Transposición Didáctica (1992) afirma que todos los conocimientos tienen un origen y se van desarrollando al paso del tiempo y en el avance de cada ciencia, de tal forma que al momento de dar a conocer estos conocimientos no son enseñados como originalmente se descubrieron o se crearon, por lo tanto es importante identificar que al teorema de Pitágoras como un saber sabio cuyo origen se remonta a

diferentes culturas ancestrales, pero en su transposición a saber enseñado sufre muchas modificaciones al grado de llegar a perder su esencia epistemológica lo que trae como consecuencia que los profesores lo refieran a sus estudiantes sólo como un saber anecdótico desprovisto de todo su potencial constructivo en la matemática y en la física.

Otra teoría que sirve de sustento a esta investigación es la teoría de obstáculos epistemológicos, considerando que el término *obstáculo epistemológico* fue utilizado por primera vez en 1938 por el filósofo francés Gastón Bachelard, referido como: “*son todos aquellos entorpecimientos y confusiones que se experimentan durante el acto de conocer*”.

Estos obstáculos tienen un fuerte componente psicológico, la manifestación del dominio de un espíritu conservativo por sobre un espíritu formativo: el conocimiento proporciona una sensación de bienestar, de poder sobre la naturaleza y las cosas, reconocer que lo que se creía saber en realidad era erróneo provoca en la persona inseguridades y conflictos.

Por otra parte, Douady (1986) menciona que la dialéctica herramienta – objeto tiene como principal interés el aprendizaje que se genera en el aula, realizando el análisis de la relación que se forma entre el alumno, el docente y el saber matemático, marcando esta metodología como un proceso cíclico que organiza los papeles del profesor y del alumno, donde los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de “*herramienta*” para resolver el problema y de “*objeto*” al tomar un lugar en la construcción de un conocimiento organizado. Generando así un acercamiento a la comprensión de las implicaciones y significados de aprender en situación escolar y a los factores puestos en juego en tal situación.

### **Metodología**

Considerando la metodología de la Ingeniería Didáctica y como parte del análisis preliminar, se ha realizando una revisión crítica de programas de estudio y de libros de texto, de secundaria y bachillerato acerca de cómo se explicita el teorema de Pitágoras.

En la primera fase de la ingeniería didáctica, se realizó un análisis preliminar basado en dos etapas del desarrollo histórico del teorema, la primera esta referida a las culturas antiguas y la segunda en los libros de texto de los Siglos XVIII, XIX y XX..

Dentro del análisis epistemológico se buscan evidencias acerca de la generalización del teorema de Pitágoras así como las variantes de sus diferentes registros, en las asignaturas de matemáticas del nivel de bachillerato. Adicionalmente se ha realizado un análisis de programas académicos para ubicar las diferentes representaciones del teorema de Pitágoras, en el desarrollo de las matemáticas en secundaria y en el nivel medio superior.

En la segunda fase del análisis *a priori* se han realizado exámenes de diagnóstico a profesores de los dos niveles educativos mencionados, con el propósito de identificar los conocimientos que tienen respecto al teorema de Pitágoras.

### Desarrollo de la investigación

De acuerdo a la metodología planteada se ha podido identificar que en los planes y programas de bachillerato después de de las reformas educativas del año 2006, el teorema de Pitágoras ya no se encuentra dentro de los temas a estudiar en las asignaturas de matemáticas, por contraste con los programas anteriores referidos a la reforma de secundaria de 1993, donde claramente se le identificaba como un tema de la asignatura de geometría y trigonometría. Lo anterior muestra una clara incongruencia, ya que sin este teorema no es posible fundamentar, argumentar, sustentar o demostrar otros temas no solo de la matemática misma, sino también de otras asignaturas.

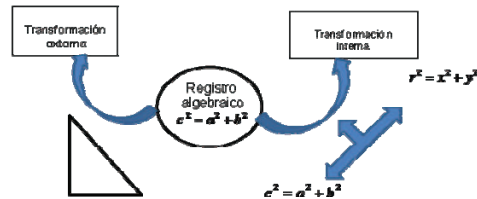
En la revisión de libros de texto de secundaria y bachillerato se identifican diversas limitantes conceptuales en su tratamiento al no involucrarse aspectos relevantes tales como; su contexto histórico y numérico, sobre todo el enfoque social que dio origen al teorema. Asimismo ninguno de los libros de texto consultados hace mención a las ternas pitagóricas. Tampoco se explicita la trascendencia que tiene en una amplia diversidad de otros saberes y su utilización práctica en diferentes ramas de las matemáticas. Es por ello que resulta importante su estudio epistemológico pues hace notar su incidencia en la didáctica de las matemáticas que han permitido buscar la forma de incorporar los resultados obtenidos en la formación de profesores.

Con la información obtenida de los libros de texto, se ha observado también que los autores sólo abordan el teorema de Pitágoras en forma tradicional, es decir, sólo se maneja el enfoque geométrico y la interpretación algebraica a través de la conocida fórmula  $c^2 = a^2 + b^2$ , sin entrar en detalles donde se posibilite al estudiante establecer criterios propios y una interpretación concordante para ser ocupada en las asignaturas de matemática y de otras ciencias. Es de mencionarse que por su parte los profesores requieren en su formación entender a mayor profundidad epistemológica lo que subyace al teorema de Pitágoras, para que no sea únicamente utilizado como herramienta que permite encontrar el lado faltante de un triángulo rectángulo, lo que posteriormente se convierte en un obstáculo epistemológico que limita su aprendizaje al no identificar todo el potencial conceptual del mismo, lo que a su vez genera una amplia desarticulación de los saberes que se relacionan con dicho teorema.

En el análisis de los libros de texto de secundaria y bachillerato, se parte del enunciado “*en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los*

catetos” realizada por Baldor (1997 p. 120), y en otros libros se cambia la palabra cuadrado, por “las áreas de los cuadrados construidos”, otros más por “el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo...”. Sin embargo, en ningún libro se menciona la generalización del teorema y esto es un aspecto muy importante para que el alumno puede ir adquiriendo una conceptualización más amplia del mismo.

Con relación a las diferentes representaciones del teorema se encontró que para este entendimiento se van realizando varias estructuras, es decir como va cambiando de una representación algebraica, a una geométrica, a una trigonométrica, entre otras que va adquiriendo en sus múltiples utilidades. Estas representaciones pueden contar según Duval (1999) con sistemas de representación externa los cuales están conformados por grupos de signos que al agruparse de acuerdo a determinadas reglas que a su vez generan representaciones externas acerca de los objetos y los hechos. Estas representaciones externas pueden ser comunicadas y compartidas por los sujetos, es decir son de carácter semiótico.

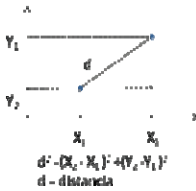
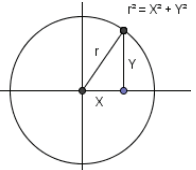
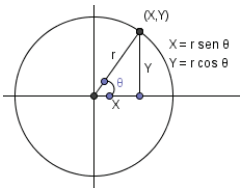

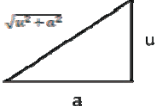
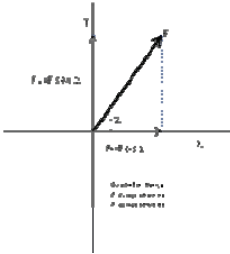


Esquema de un registro de representación semiótica

Según Duval (1999) existen tres actividades cognitivas relacionadas con los sistemas de representación externa (semióticos): la formación de representaciones, el tratamiento de las mismas y su conversión. Estos tratamientos cambian en diferente forma, cuando se inicia con las ternas pitagóricas, para que se cumpla esta igualdad, lo primero que se observa es la existencia de una características generalizada la cual deriva en lo constante o fijo de cada uno de los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , para que se cumpla la terna, sin embargo, cuando se traslada a un triángulo se sigue la misma temática, es decir los tres valores son constantes, pero cuando se desea conocer la distancia entre los dos puntos ahora el valor de la distancia depende directamente de la ubicación de los otros puntos, cuando pasa a la ecuación de la circunferencia los valores de “ $r$ ” son constantes y ahora los valores de “ $x$ ” y “ $y$ ” son variables, sin embargo cuando se ubica a “ $r$ ” con el valor de  $1$  se encuentran ahora los valores para “ $x$ ” y “ $y$ ” diferentes y “ $r$ ” toma un solo valor único, para que después en la identidad trigonométrica los tres valores se regresan una terna pitagórica.

Considerando que el teorema tienen un estatus de herramienta, inscritas en un contexto bajo la acción y el control de un individuo o grupo en un momento dado, de ahí la importancia de considerar este marco teórico, respecto al teorema de Pitágoras, de tal forma que la mayoría de veces el alumno puede recurrir a una herramienta implícita o explícitamente. Cuando lo hace de manera implícita es porque pone en juego concepciones que le permiten utilizar un procedimiento que y él mismo ya conoce o se representa en términos de acciones en un contexto particular, en tanto que recurre a una herramienta explícita cuando emplea nociones que puede formular y justificar su uso.

A su vez los saberes matemáticos adquieren el estatus de objeto cuando se implica el reconocimiento de nociones y teoremas como parte de un conjunto de conocimientos científicos y reconocidos, así como también, la formulación de definiciones, enunciados y demostraciones de teoremas. Bajo esta perspectiva claramente está definido el teorema de Pitágoras como un saber matemático, científico, con una definición y con sus respectivas demostraciones logrando un estatus de objeto.

<p>La distancia entre dos puntos</p>  <p><math>d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}</math> d - distancia</p>	<p>En la deducción de la ecuación de una circunferencia.</p>  <p><math>r^2 = x^2 + y^2</math></p>	<p>Identificación de identidades trigonométricas.</p>  <p><math>X = r \text{ sen } \theta</math> <math>Y = r \text{ cos } \theta</math></p>
<p>Calculo de la longitud de arco</p>  <p><math>s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx</math></p> <p>Fuente</p>	<p>Integración por sustitución trigonométrica.</p>  <p><math>\sqrt{a^2 - u^2}</math></p> <p>u</p> <p>a</p>	<p>Componentes de una fuerza</p>  <p><math>F_x = F \text{ cos } \theta</math> <math>F_y = F \text{ sen } \theta</math></p>

Diferentes representaciones del teorema de Pitágoras

Con la información obtenida se pudo concretar que un concepto tiene el status de herramienta cuando nuestro interés en él se centra en la utilidad que nos brinda para resolver un problema, en tanto que deviene en objeto cuando lo entendemos como un ente cultural insertado en una estructura más robusta, el saber erudito socialmente validado. Por lo tanto, cuando se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos, cuando se desea expresar las distancias trigonométricas, cuando se tiene la necesidad de resolver triángulos rectángulos, para el cálculo de momentos o de las componentes de una fuerza en estática, en la determinación del cálculo de la longitud de una cuerda, entre otras muchas áreas del conocimiento donde el teorema puede ser usado como herramienta de cálculo.

Es claro que al trabajar con las anteriores representaciones, los estudiantes pueden ampliar considerablemente su conceptualización del teorema de Pitágoras, lo que permite identificar el doble estatus de herramienta y de objeto. Basados en la idea que las nociones pueden ser abordadas, modificadas y trabajadas en las situaciones propuestas a los alumnos derivando posteriormente en nuevos conceptos que son, a su vez, susceptibles de ser generalizados, y llevados a mejores condiciones de aprendizaje, buscando evidenciar de ese modo la articulación conceptual de los mismos.

### Conclusiones

Después de haber realizado los análisis antes mencionados, se puede afirmar claramente que saberes sabios como lo es el teorema de Pitágoras, cada día disminuye la importancia que se debe de dar en la formación matemática, ocasionando que los conocimientos de esta área tengan poco sustento histórico y epistemológico, así mismo se puede afirmar que no es suficiente que el profesor identifique la presencia del teorema de Pitágoras, en diferentes representaciones, sino se requiere además efectuar una articulación conceptual más profunda de las mismas, rescatando su relevancia epistemológica.

### Referencias bibliográficas

- Aldana, M., Azar, J. (2005). *Matemáticas II. Geometría y trigonometría*. México: SEP DGETI.
- Arraiga, A., Benítez, M. Cortés. (2008). *Matemáticas 3 Inducción a las Competencias*. México: Pearson Educativo.
- Baldor, A. (1997). *Geometría Plana y de Espacio y Trigonometría*. México: Publicaciones Cultural, S.A. DE C.V.
- Chevallard, Y. (1997). *La Transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Colombia: Grupo de Educación Matemática.

- Escareño, F., Mander, E., Espinosa, H. (2005). *Enfoque de resolución de problemas*. México: Pearson Educativo.
- Guzmán, A. (2003). *Geometría y trigonometría*. México: Publicaciones Culturales.
- Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(1), 45-78.
- Piaget, J., García, R. (2004). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI Editores.
- Rondero, C. (2006). Propuestas didácticas acerca de la articulación de saberes matemáticos, en: R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Editores), investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: *Un Reporte Iberoamericano (p.p. 151-162)*, Díaz de Santos- Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C. México.
- Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente* España: Ediciones Paidós Ibérica.