View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE FUNCIONES CON LA UTILIZACIÓN DE UN SOFTWARE

Daniela Müller, Adriana Engler, Silvia Vrancken
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
dmuller@fca.unl.edu.ar
Campo de investigación: Tecnología Avanzada Nivel: Medio, Superior

Resumen. *A partir de nuestra experiencia docente de varios años, hemos observado, en el contexto del aula, que los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del cálculo. Para favorecer el aprendizaje de algunos de ellos, como por ejemplo: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, con el cambio de concavidad, puntos de máximo y mínimo o de inflexión, diseñamos algunas actividades de aprendizaje empleando el programa para graficación de funciones de la página de Lagares para implementarlas de manera complementaria al trabajo en el aula. En ellas se promueven estrategias de graficación que el alumno deberá combinar con estrategias analíticas para corroborar los resultados que presuponga del análisis de las gráficas.*

Palabras clave: recursos tecnológicos, estudio de funciones

Introducción

En el primer año de una carrera universitaria no matemática, la comprensión de los conceptos básicos del Cálculo, suele ser problemático para la mayoría de los alumnos. Uno de los conceptos centrales es la noción de función.

Para Farfán (1992, c.p. Ferrari y Martínez, 2002), entre las causas que hacen de la función uno de los conceptos matemáticos más difíciles de dominar y enseñar, se encuentran las diversas concepciones y múltiples representaciones de ésta, potenciadas por el hecho que la enseñanza tiende a sobrevalorar la algoritmización y los métodos analíticos por encima del desarrollo de habilidades propias del pensamiento matemático.

Al iniciar un curso de Cálculo los alumnos ya saben el concepto de función y deberían poder realizar sin inconvenientes conversiones entre los distintos registro de representación de la misma (gráfico, numérico, algebraico y coloquial). Para ello es importante proponer actividades que propicien el trabajo con diferentes representaciones.

Duval (1998) establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación. Agrega además, que no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, sino que también lo es el análisis de las actividades de conversión entre representaciones que debemos proponer a nuestros alumnos. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático.

Relativo al tema funciones, generalmente se le proponen al alumno tareas de conversión de una representación como la algebraica a su correspondiente gráfica y es poco usual que se le solicite el proceso inverso.

¿Por qué hacemos referencia a las dificultades en el aprendizaje del concepto de función?

Porque una mala concepción del mismo redundará en un bajo rendimiento en el aprendizaje del Cálculo. Debemos proponer actividades que favorezcan el desarrollo de una visión holística de las funciones y tareas de conversión de una representación a otra y viceversa ya que consideramos que esto promueve un mejor entendimiento de las funciones.

La creciente introducción de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, han generado nuevas posibilidades para mejorarlos y enriquecerlos. Integrar dichos recursos a los procesos en los que las actividades presenciales se mantienen de manera significativa, permite, entre otros aspectos, mejorar el acceso a los contenidos y a sus distintas representaciones. Esto puede complementarse con guías de estudio y propuestas de actividades (Sigalés, 2004). Además contribuye a mejorar la calidad de la docencia a través de una mayor cantidad y calidad de las interacciones entre el profesor y los alumnos y de los alumnos entre sí, como así también de una mejor adaptación a los ritmos, intereses y necesidades de cada alumno y, en consecuencia, una mayor personalización de la actividad docente.

Con el objetivo de desarrollar habilidades para trabajar dentro y entre diversas representaciones de un mismo concepto, la utilización de recursos tecnológicos resulta un complemento importante.

No perdemos de vista, tal como lo expresa Luis Moreno Armella (2002) que:

> *"Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es la tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología".*

A partir de nuestra experiencia docente de más de 20 años, hemos observado que en el contexto del aula, los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del Cálculo como por ejemplo: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, con el cambio de concavidad, puntos de máximo y mínimo o de inflexión. Para favorecer el aprendizaje de estos conceptos, diseñamos algunas actividades de aprendizaje para ser implementadas en ambientes computacionales, como complemento al trabajo en el aula que propician el trabajo con diferentes representaciones.

Para la preparación de las distintas actividades que forman parte de este trabajo, tuvimos en cuenta las consideraciones planteadas por Moreno (2002) para aquellas propuestas en las que se utiliza la tecnología para graficar funciones. En las mismas se promueven estrategias de graficación que el alumno deberá combinar con estrategias analíticas que le permitan corroborar los resultados que le sugieran las representaciones gráficas.

Desarrollo de la propuesta

El software elegido para el desarrollo de las actividades fue *"Funciones para Windows"* versión 2.7, por ser un programa de tipo freeware que puede obtenerse gratuitamente desde la página http://www.lagares.org y que además tiene requerimientos mínimos de hardware y es de fácil manejo.

Este programa permite realizar distintos tipos de gráficos de una amplia variedad de ecuaciones para las que sólo debe escribirse la expresión matemática de las mismas. Pueden personalizarse las gráficas determinando los intervalos de representación sobre cada uno de los ejes cartesianos.

Para una función cualquiera, el programa calcula sus ceros, valores máximos y/o mínimos, intervalos de crecimiento y de concavidad, puntos de inflexión, entre otros, mostrando en cada caso la representación gráfica de ellos.

Los alumnos están familiarizados con el manejo del programa a través de otras actividades realizadas con anterioridad, en las que no sólo se promueven la utilización de las distintas representaciones y la conversión de unas representaciones en otras, sino que también se refieren a la elección de la ventana óptima en la que se dibuje la gráfica.

Para obtener la ventana de visualización de la función, además de ingresar la expresión algebraica de la misma, los alumnos pueden establecer la escala en cada uno de los ejes y los intervalos de variación de las variables x e y. Estos intervalos son los que modifican reiteradamente hasta obtener la gráfica en la que se observen todas las características particulares de la función que se representa. Es importante que los alumnos practiquen estas cuestiones con diferentes funciones que se desarrollan en clase, como por ejemplo las polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

En el contexto del aula, al realizar el estudio de una función, se busca representarla o tener una idea bastante aproximada de su aspecto a partir de la expresión algebraica y de cierta información adicional sobre las características de la gráfica. Esta información se obtiene a partir de la determinación del dominio, de las intersecciones con los ejes coordenados, del análisis de la paridad y simetrías, de la obtención de los puntos de discontinuidad y de la determinación de las ecuaciones de las asíntotas, del análisis de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, junto a la determinación de los extremos relativos (máximos y/o mínimos), del estudio de la concavidad y de la obtención de los puntos de inflexión.

En las actividades que se proponen a continuación, se sigue otro procedimiento. A partir de la gráfica de la función, se analizan cada una de las características enunciadas.

Todas las respuestas pueden ser controladas mediante comandos propios del programa y se encuentran en el menú que se despliega al presionar en la barra superior *1fu*.

Por razones de extensión sólo presentamos el enunciado de algunas de las actividades de la propuesta junto a los comentarios sobre su resolución que aparecen en cursiva.

Enunciado de la Actividad

Representa gráficamente $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + 3x^2\right)$

Observando la gráfica de la función, determine:

a) Dominio: .

Conjunto imagen: .

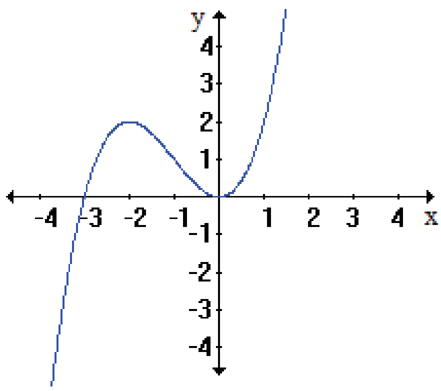
b) Intersecciones con el eje x (ceros): .

c) Intersección con el eje y (ordenada al origen): .

d) Analice el comportamiento de la función:

- cuando $x \to +\infty$.
- cuando $x \to -\infty$.

El alumno obtiene:



Para controlar sus respuestas, del menú selecciona Raíces e Imagen.

e) Indique, si presenta, los puntos de discontinuidad .

f) Determine (en caso de existir):

Asíntotas verticales: …………… Asíntotas horizontales: …………….

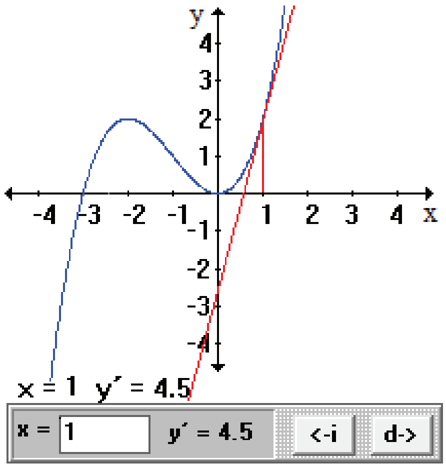
g) Obtenga analíticamente f '(x) = ……………………

h) Analice el signo de la derivada primera en todo el dominio de la función

i) Indique los valores de x que anulan la derivada primera o donde no existe …………

Los valores del dominio de una función donde la primera derivada se hace cero o no existe, son los *puntos críticos* de la función dada.

Para analizar el valor y por lo tanto el signo de la derivada primera, seleccione Derivada en un punto… y en el cuadro de diálogo correspondiente a x introduzca el valor de la abscisa del punto de la gráfica en el que desea calcular la derivada. Utilizando los botones <–i o d–> puede obtener la derivada en puntos próximos al anterior. Para cada punto considerado se visualiza en color rojo la recta tangente a la gráfica en dicho punto. Esto puede observarse en la gráfica que se encuentra a la derecha:

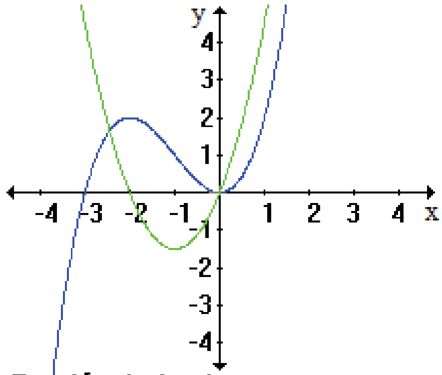


j) Grafique la función derivada.

Seleccione Función derivada y obtendrá una gráfica en color verde superpuesta a la anterior.

Observando esta gráfica, complete: Dominio de f '(x) = ……………………

La función derivada se hace cero en x = …… y no existe en x = ……

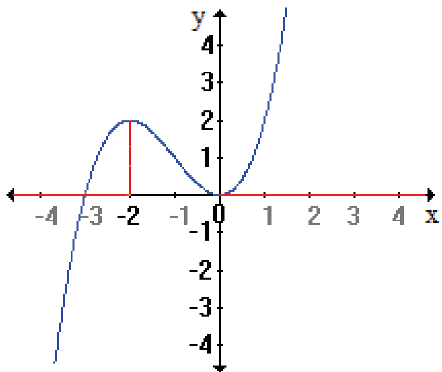


Función derivada

k) Compare las dos gráficas. Considerando los intervalos que determinan los puntos críticos, complete el siguiente cuadro indicando el signo de la derivada primera y si en cada intervalo la función es creciente o decreciente:

Intervalo	Signo de f '(x) *(gráfica verde)*	Comportamiento de f(x) *(gráfica azul)*
(……, ….)		
(……, ….)		
(……, ….)		

Seleccionando Intervalos de crecimiento e Intervalos de decrecimiento. Se observa una línea roja sobre el eje de las abscisas que indica dónde la función es creciente o decreciente según sea el caso, quedando determinados además los extremos de los intervalos.



Intervalos de crecimiento

Por lo tanto, de acuerdo al signo de la derivada primera, puede concluir sobre el crecimiento de la función que:

Si la derivada de una función es ……………. en un intervalo, la función dada es …………………… en dicho intervalo.

Si la derivada de una función es ……………. en un intervalo, la función dada es …………………… en dicho intervalo.

l) Determine los máximos y/o mínimos relativos.

Mínimo: y = ……… en x = ……….. $\Rightarrow$ Mínimo relativo (……, ……)

Máximo: y = ……… en x = ……….. $\Rightarrow$ Máximo relativo (……, ……)

Seleccione las opciones Máximos y Mínimos del menú para controlar su respuesta.

m) Calcule f ''(x) = ……………………

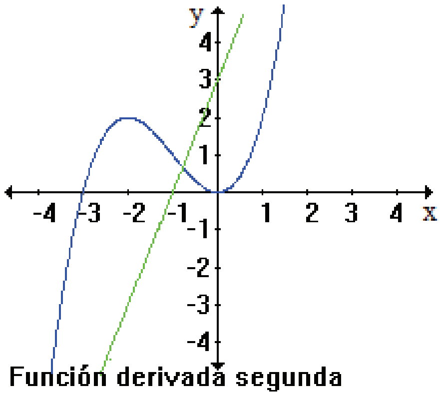
n) Grafique la segunda derivada de la función.

Seleccione Segunda derivada y obtendrá una gráfica en color verde superpuesta al de la función dada.

Complete:

Dominio de f ''(x) = ……………………

La segunda derivada se hace cero en x = …… y no existe en x = ………..



o) Compare las dos gráficas. Considerando los intervalos que determinan los posibles puntos de inflexión, complete el siguiente cuadro indicando el signo de la derivada segunda y si en cada intervalo la gráfica de la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo:

Intervalo	Signo de f ''(x) *(gráfica verde)*	Comportamiento de f(x) *(gráfica azul)*
(……, ….)		
(……, ….)		

Seleccione Intervalos de concavidad (para la concavidad hacia arriba) e Intervalos de convexidad (para la concavidad hacia abajo).

Por lo tanto, de acuerdo al signo de la derivada segunda, puede concluir sobre la concavidad de la gráfica que:

Si la derivada segunda de una función es ……….. en un intervalo, la gráfica de la función dada es ………………………… en dicho intervalo.

Si la derivada segunda de una función es ……….. en un intervalo, la gráfica de la función dada es ………………………… en dicho intervalo.

p) Indique los puntos de inflexión.

En x = ……… la gráfica de la función presenta un *punto de inflexión*.

Por lo tanto el punto de inflexión es (……, ……)

Seleccione Puntos de inflexión.

Reflexiones

La simple aplicación de estas actividades no es suficiente para alcanzar los beneficios deseados. Es preciso fomentar un cambio en la conciencia de los alumnos.

Consideramos sumamente importante transmitir nuestro interés por el progreso de los alumnos y el convencimiento de que un trabajo adecuado terminará produciendo buenos resultados, aún cuando inicialmente aparezcan dificultades.

Todas las estrategias didácticas que podamos utilizar deberían orientarse hacia el planteo de actividades que permitan obtener mejores resultados en el aprendizaje y crear un clima de actitudes positivas hacia la Matemática. Cuanto más amplias y complejas sean las relaciones que se establezcan, mayor será la capacidad de los alumnos de utilizarlas en situaciones cotidianas, en la construcción de nuevos significados y en el establecimiento de nuevas relaciones.

También, es necesario utilizar en forma coherente diferentes representaciones de los distintos conceptos que nos permita abordar los temas de manera más eficiente. Además, es importante hacer un uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan darle un significado concreto a las nociones matemáticas.

Al diseñar las actividades descriptas, la principal característica que quisimos impartirles para que jueguen un papel orientador e impulsador del trabajo de los alumnos, es que ellos puedan percibirlas como ayuda real, generadora de expectativas positivas.

Referencias bibliográficas

Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S., Hecklein, M. (2005). *El Cálculo Diferencial.* Santa Fe, Argentina: Centro de Publicaciones. Universidad Nacional del Litoral.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201. Grupo Editorial Iberoamérica : México. Traducción de: *Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Vol. 5* (1993).

Ferrari, M., Martínez, G. (2003). Construcción de funciones con calculadoras graficadoras. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16* (pp. 710-716). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME.

Moreno, L. (2002). Graficación de funciones. En *Memorias del Seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas* (pp. 110-140). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Sigalés, Carles (2004, septiembre). Formación universitaria y TIC: nuevos usos y nuevos roles. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC)*. Vol. 1, nº 1. Recuperado el 20 de febrero de 2005, de http://www.uoc.edu/rusc/1/index.html