OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA Y LA FORMACIÓN DE DOCENTES

Carmen Andrade Escobar.

Colombia

andrade.carmel@gmail.com

Resumen. El interés de este artículo es reflexionar sobre los obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y cómo se pueden evitar con una adecuada formación de docentes. Los obstáculos son dificultades que no se pueden superar e impiden avanzar en el nuevo conocimiento. Brousseau los clasifica en: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos. Los ontogenéticos se refieren a condiciones genéticas específicas y por lo tanto, no se pueden evitar; los epistemológicos son saltos conceptuales que se deben superar para promover el conocimiento; y los didácticos surgen de la enseñanza y por lo tanto, se pueden evitar. El análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes permite concluir que estos provienen de errores didácticos en tres aspectos: metodológicos; curriculares, cuando no promueve los saltos conceptuales sino trata de evitarlos; y conceptuales cuando se enseñan nociones falsas que distorsionan el concepto. Por último, se estudia la didáctica de Federici como la base de la formación de docentes para evitar los obstáculos didácticos.

Palabras clave: obstáculos didácticos, formación de profesores, dificultades en el aprendizaje, pensamiento numérico.

Abstract The interest of this article is to reflect on the didactic obstacles in the learning of the mathematics and how they can be avoided with an adequate formation of educators. The obstacles are difficulties that cannot be surpassed and they impede to advance in the new knowledge. Brousseau classifies them in: ontogenetic, epistemic and didactic. The ontogenetic refer to specific genetic conditions and therefore, they cannot be avoided; the epistemic are conceptual leaps that should be surpassed to promote the knowledge; and the didactic arise of the teaching and therefore, they can be avoided. The analysis of the most frequent errors of the students allows concluding that they come from didactic errors in three aspects: methodological; curriculum, when does not promote the conceptual leaps but tries to avoid them; and conceptual when false notions are taught that distort the concept. Finally, we studied Federici's didactic as the base of the formation of educators to avoid the didactic obstacles.

Key words: teaching obstacles, training of teachers, difficulties in learning, numeric thought.

Introducción

Una de las grandes preocupaciones de la educación en nuestro país es la deserción escolar cuya principal causa es el fracaso en el aprendizaje de la matemática. Las investigaciones en educación matemática señalan que las dificultades de los estudiantes se deben tanto a la complejidad de los conceptos como a las metodologías. Sin embargo, otra causa de estas dificultades es la concepción de la educación matemática tradicional. Por lo tanto, si se modifica esta mirada de la educación se superan muchas dificultades (Federici, 2004).

La educación tradicional consiste en aprender a manipular números y figuras geométricas. Esto no es enseñar matemáticas porque "(…) estamos enseñando a manejar números, no a pensar sobre ellos. Para hacer matemática no basta realizar operaciones, contar y calcular. La matemática comienza con la toma de conciencia de lo que está involucrado en esas operaciones" (Federici, 2004, p.4).

Lo que este artículo pretende es presentar la didáctica de la matemática que aborda la matemática desde la pregunta que atiende al cómo se construye y por qué se construye de ese modo. De esta manera, la educación matemática contribuye a superar las dificultades en el aprendizaje, construyendo el significado de los conceptos, y la formación de docentes centra su atención en estos aspectos y no sólo en la metodología. "(…) hemos insistido en la falsa aproximación a la matemática que aprendimos de nuestros maestros y enseñamos a nuestros alumnos por lo que se hace necesario cuestionar las evidencias a partir de las cuales trabajamos actualmente con los maestros" (Federici, 2004, p.6). Antes de reflexionar sobre la didáctica que contribuye a superar las dificultades, se analiza el origen de estas dificultades en los estudiantes.

Obstáculos didácticos

Cuando las dificultades no se pueden superar, se convierten en obstáculos porque impiden avanzar en la construcción del nuevo conocimiento. Estos obstáculos pueden ser de tres tipos, según de dónde provengan: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos (Brousseau, 1989). Los obstáculos ontogenéticos provienen de condiciones genéticas específicas de los estudiantes y por lo tanto, no se pueden evitar mediante la formación de docentes. Los obstáculos epistemológicos son parte del proceso de aprendizaje y no solo no se deben evitar sino que se deben enfrentar porque juegan un papel muy importante en la adquisición del nuevo conocimiento. Por ejemplo, el salto conceptual entre los números naturales y los números racionales (Brousseau, 1989). Por el contrario, los obstáculos didácticos provienen de la enseñanza, y se deben evitar porque impiden superar los obstáculos epistemológicos, es decir, impiden ver las cosas de una nueva manera. Por esta razón, no se puede seguir aplazando la reflexión sobre estos obstáculos, porque si se conocen se pueden evitar.

Los obstáculos didácticos se estudian a través del análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes. Se concluye que estos errores provienen de dificultades que se originan en la enseñanza por alguno de estos errores didácticos: metodológicos, curriculares o conceptuales. Se considera un error metodológico el uso, por parte del docente, de palabras inadecuadas o "trucos"; un error curricular se presenta cuando el diseño del currículo impide dar un salto conceptual o superar el obstáculo epistemológico, que se debe dar porque es fundamental para adquirir el nuevo conocimiento; y un error conceptual es una noción falsa que se enseña, precisamente, para evitar el salto conceptual, y que distorsiona el concepto. En cualquiera de los casos, los errores que provienen de la didáctica son muy difíciles de modificar e impiden avanzar en el conocimiento: las palabras inadecuadas no permiten dar un nuevo significado a las palabras técnicas que se usan en grados posteriores y una noción falsa impide construir el significado matemático del concepto y dar el salto conceptual.

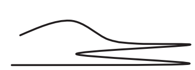
Los errores más frecuentes, en niños de 7 a 12 años, se presentan en el sistema de numeración decimal y en los números racionales sin signo. Por ejemplo, en el sistema de numeración decimal, se presentan los siguientes errores, entre muchos otros casos: dar el valor de la cifra de acuerdo a su posición en el número; sumar números cuando la suma de las unidades es mayor que la decena; restar números cuando las unidades que se restan son mayores; dar el paso de la suma a la multiplicación; usar los símbolos, mayor que y menor que. En cuanto a los números racionales sin signo, los errores se presentan en: la construcción de los números, especialmente, cuando el numerador es mayor que el denominador; la relación entre el numerador y el denominador; la relación del número con la medida y la razón; el cálculo de las operaciones y la relación con situaciones problema.

A continuación se analizan algunos errores frecuentes de los estudiantes producidos por los diferentes tipos de obstáculos didácticos.

Errores metodológicos

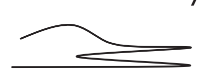
Los siguientes ejemplos de errores de los estudiantes se producen por el uso de palabras inadecuadas o de trucos, por parte del docente:

a) En el uso de los signos < y >: El ejemplo de error metodológico que más llama la atención está relacionado con la siguiente anécdota: un niño de sexto grado, 12 o 13 años, pasa al tablero a escribir el signo mayor o menor entre un par de números. Se queda pensando y pregunta: ¿Cómo es lo de la boca del cocodrilo? Explica que su profesora de primer grado le enseñó a usar el símbolo "mayor que", haciendo referencia a la boca del cocodrilo, con estas palabras: "la boca grande para el mayor". Para entender el "truco" utilizado por la profesora, dibujé una cabeza de cocodrilo, o algo parecido, con la boca abierta:



Le pregunté al niño: ¿Dónde ubicas los números 4 y 3? El niño los ubicó así:

4 3



es decir, 4 < 3, usando el sentido común: el mayor se come al menor.

b) Otro error metodológico se presenta cuando la suma de las unidades es mayor que la decena: 37 + 48 = 75. Se le enseña que pone 8 y lleva 1. El error se produce porque al niño se le olvida "llevar".

De igual manera, el error se presenta en la resta cuando las unidades que se restan son mayores: 354 – 189 = 235. El niño sabe que 9 no se puede restar de 4, pero no se acuerda de "prestar", entonces, hábilmente, invierte los números y resta como si se puede: 9 – 4 y 8 – 3.

En este ejemplo de resta: 305 – 9, el niño no sabe cómo hacerla, porque 0 no tiene nada para prestar.

La dificultad se presenta porque el niño olvida las "recetas" de los procedimientos y recurre al sentido común.

c) Con relación al sistema de los números racionales, también se usan varias palabras inadecuadas. La palabra "fracción" en sí misma es un obstáculo didáctico. Se explica que se "cogen o toman" partes de un todo. En el caso de 5/3, ¿Cómo se pueden coger 5 partes de 3? El sentido común indica que no se puede coger un número de partes mayor que el total. Adicionalmente a esta dificultad, esta la palabra "impropia" que se usa para esta fracción, y que da la idea de algo sucio que se debe evitar (Federici, 2001).

El niño, desde temprana edad, aprende una noción y luego, el docente se contradice: por ejemplo, en el caso de 5/3, se enseña que como no se pueden tomar 5 partes de 4, la unidad son dos unidades. ¿Puede una unidad estar formada por dos unidades?

Los anteriores ejemplos de errores de los estudiantes provienen de los errores metodológicos. El docente usa palabras inadecuadas o "trucos" para ayudarle al niño a salir de la dificultad que implica para él la manipulación de símbolos abstractos; esta ayuda es temporal porque a largo plazo se convierten en obstáculos.

Errores curriculares y errores conceptuales

Los errores curriculares se presentan cuando el diseño del currículo evita los saltos conceptuales o epistemológicos necesarios para avanzar en el conocimiento. A continuación se presentan tres ejemplos de saltos conceptuales que se deben dar pero que tradicionalmente se han evitado, y se han enseñado errores conceptuales:

a) El salto entre los números de 1 y 2 cifras es necesario porque el número de 1 cifra representa un cardinal mientras que el número de 2 cifras es una construcción lógica de un número de decenas y un cardinal, por ejemplo: 35 es 3 decenas y 5. Sin embargo, en la educación tradicional se enseña que el número doce es el cardinal de un grupo de 12 elementos, respectivamente, de igual manera, que se enseña que 9 representa el cardinal de un grupo de nueve elementos. El niño aprende que doce está formado por 1 y 2, no por 1 decena y 2. Por esta razón, no construye 12 como la suma: 10 + 2. Esta omisión será un impedimento para avanzar en el conocimiento, por ejemplo, en el cálculo de sumas con números de 3 o más cifras y en el valor posicional.

   Para reparar este error se utiliza como recurso didáctico la tabla de valor posicional:

d	u
1	2

   Sin embargo, este recurso lleva a otro error: al leer la tabla el niño confunde el valor de la cifra, 1, con el valor posicional, 10. La dificultad se observa mejor con los números de 3 cifras:

c	d	u
5	0	3

   ¿Cuántas decenas hay en el número 503? El niño lee la tabla y responde: 0. ¿Puede formarse una centena con 0 decenas? El niño responde de acuerdo a la lectura de la tabla y al concepto de centena que le han enseñado: 1 centena son 100 unidades. No se le enseña que 10 decenas son una centena. Por esta razón, no se sorprende que un número de 3 cifras tenga 0 decenas.

b) El salto entre la suma de números menor que la decena y mayor que la decena se presenta porque para sumar 3 más 4, solo se requiere calcular la suma: 3 + 4 = 7. Pero, para sumar 7 + 8, se requiere un proceso lógico para formar la decena:

   $7 + 8 = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$

   En la educación tradicional para obtener el resultado de 7 + 8, el niño cuenta 8 a partir del 7. Se produce un error conceptual: contar es diferente de sumar. En el caso de la suma 37 + 8, se le enseña un procedimiento mecánico en forma vertical: 7 más 8 es igual a 15, pone 5 y lleva 1. ¿Lleva 1 o se forma una decena adicional?

Otro salto conceptual se produce entre la resta cuando las unidades que se restan son menores y cuando las unidades que se restan son mayores, por ejemplo: 35 – 1 = 30 + (5 – 1) = 30 + 4 = 34, solamente, se resta 5 – 1, y se suman las mismas decenas. Pero en el caso de 35 – 8, se requiere un procedimiento diferente: como no se puede restar 8 de las unidades se usa una de las decenas para restarlo, 35 – 8 = 20 + (15 – 8) = 20 + 7 = 27. Tradicionalmente, se le enseña la siguiente receta: no se puede restar 8 de 5, entonces el 5 le pide prestado 1 al 3, etc.,… ¿Los números prestan? (Prestar suena a una institución financiera). Con esta receta, al niño se le olvida prestar y no sabe qué hacer o invierte los números, es decir, resta 8 – 5.

c) El salto entre los números naturales y los números racionales, es fundamental, porque los números racionales sin signo, muy mal llamados "fraccionarios" (Federici, 2001, p. 43), están compuestos por 2 números relatores u operadores, un multiplicador y un divisor. Por el contrario, la fracción como relación parte-todo, está compuesta por dos números naturales, uno arriba y uno abajo. Esta noción no solo evita el salto conceptual entre el número contador y el número relator, sino que propicia un error muy frecuente en la suma de fracciones, por ejemplo:

   2/5 + 3/7 = 5/12

   El niño suma números naturales, los de arriba y los de abajo. Por esta razón, la noción de fracción que se enseña como la base de número racional sin signo impide construir el significado del mismo (Andrade, 2008).

En conclusión: los obstáculos didácticos se producen por errores en la enseñanza, ya sea por el uso inadecuado de palabras o por diseño del currículo que evita los saltos conceptuales que son necesarios para avanzar en el conocimiento, y en consecuencia, se enseñan nociones que distorsionan los conceptos. Estos errores se presentan, precisamente, cuando el profesor repite lo que aprendió de sus profesores y no conoce ni el concepto ni su proceso de construcción.

Formación de docentes

Después de analizar los errores de los estudiantes cuyo origen está en los obstáculos didácticos, la conclusión es que si las dificultades se generan por la enseñanza, se pueden evitar. Estas dificultades se producen por el enfoque tradicional; el niño debe manipular símbolos abstractos pero aún no ha desarrollado ese proceso cognitivo. Aunque no es fácil cambiar esta mirada, porque a través de muchas generaciones se han transmitido los mismos contenidos, es necesario hacerlo para que no se sigan repitiendo los mismos errores didácticos.

Por el contrario, la educación matemática debe atender a las preguntas sobre cómo se construye un concepto y por qué se construye de ese modo, y respetar el proceso de desarrollo del pensamiento lógico matemático del niño. Entonces, el objetivo de la formación de docentes es adquirir herramientas conceptuales en cuanto a la disciplina misma de la matemática y a la psicología genética, y no solo en cuanto a la metodología. La didáctica de la matemática de Federici provee herramientas para la formación de docentes en estos aspectos, y para la reflexión fundamental sobre: ¿Qué? ¿Para qué? y ¿Cómo se enseña la matemática? A continuación se estudian los aspectos fundamentales de la didáctica de Federici.

La didáctica de Federici es de carácter ético porque el docente debe conocer los conceptos que enseña y el proceso de construcción del concepto en el niño. Para conocer este proceso debe apropiarse de la historia de su disciplina y no sólo de los resultados de la misma. Es fundamental que cada docente reviva, de alguna manera, los procesos de descubrimiento e invención de los conceptos porque no basta saber matemática para enseñarla bien, aunque saber matemáticas es necesario para poder enseñarlas (Federici, 2004).

La acción del niño sobre lo concreto es indispensable para que el niño se siente "metido" en el problema y sienta el placer de descubrir y generalizar (Piaget, 1983). En la medida en que descubra las relaciones con el material didáctico podrá construir el significado de los conceptos. Toda acción termina con una representación para que se logren las transformaciones, y para que el estudiante confronte su idea y el profesor la puede evaluar. Es importante aclarar que el juego por sí mismo no lleva al aprendizaje; es necesario, que el profesor tenga un objetivo claro sobre los logros de cada actividad para que propicie las transformaciones por medio de las preguntas adecuadas, y para que el niño aproveche el potencial del material como una herramienta para pasar de lo concreto a lo abstracto.

La construcción del significado de los conceptos se logra con las transformaciones de significado que se dan en la interacción entre el docente y el discente: "(…) el docente debe comenzar a hablar según la verdad poseída por el discente, es decir, debe empezar a hablar de lo que el discente sabe, para (…) empujarlo más allá" (Federici, 2004, p.5). El discente descubre los significados y el docente le da las palabras técnicas, de esta manera, la sintaxis es el resultado de la semántica. "A las significaciones les brotan palabras, lejos de que a esas cosas que se llaman palabras se las provea de significado" (Heidegger, 1988, p.180).

Además, esta didáctica tiene un carácter epistemológico porque el proceso ontogenético repite, en cierta manera, el proceso filogenético: el proceso de construcción de los conceptos en el niño se basa en el proceso de construcción de los conceptos a través de la historia de la humanidad; es un camino ideal o epistemológico porque no recorre todos los vericuetos sino sólo los puntos esenciales mirados desde hoy, tanto en perspectiva como en retrospectiva, con el fin de evitar "el camino tortuoso, sinuoso de ayer" y aprovechar el conocimiento actual. "Las transformaciones que se realizan en el sistema de significaciones del discente, inducidas por las interpelaciones del docente, deben, en cierta manera, repetir las (transformaciones) que en algún momento se dieron en la historia de una idea, de un concepto, de una disciplina, de una teoría, (…)" (Federici, 2004, p.6).

En la propuesta del profesor Federici es necesario integrar todos los tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio que son la base para construir cada una de las ramas de la matemática: cálculo, geometría, medida, álgebra y estadística, respectivamente, de igual manera que el conocimiento se desarrolló en forma integral a través de la historia de la humanidad. No obstante, tradicionalmente se *enseñan en capítulos separados e independientes.*

Al modificar la mirada de la educación matemática tradicional hacia un desarrollo del pensamiento lógico matemático, el interés se centra en el proceso del niño y el manejo de símbolos aparece como una necesidad de escribir en forma corta el lenguaje gráfico y el lenguaje común, que expresa el significado construido previamente por el niño, mediante la acción sobre el material concreto (no sobra recordar que los símbolos son abstractos). Sin embargo, este proceso requiere que se desarrollen desde temprana edad, las estructuras lógicas, las bases del pensamiento matemático y las relaciones espaciales, y su interrelación.

Conclusiones

La reflexión sobre los obstáculos didácticos es necesaria porque si se descubre su origen se modifica la didáctica y la formación de docentes. Aunque los fines de la educación matemática dependen de las políticas educativas de la institución y del país que se reflejan en programas y currículos, en última instancia, la responsabilidad de los cambios recae sobre las personas que estamos directamente comprometidas con la educación de los niños: los docentes, los padres de familia y los docentes de docentes. No es suficiente que las investigaciones apunten a nuevas metodologías sino que es necesario hacer una reflexión sobre qué significa educar en matemáticas (Federici, 2004).

Nuestra responsabilidad es evitar las dificultades que provienen de la didáctica y esto exige "una toma de conciencia del proceso, la conciencia de lo que se hace y de por qué se hace" (Federici, 2004, p.3). La formación de docentes también debe enfocarse a responder estas preguntas y a que cada docente conozca los conceptos que enseña y el proceso psicogenético, para formular y usar las palabras adecuadas, y vigilar y estimular el proceso de desarrollo del pensamiento lógico matemático de sus estudiantes.

Referencias bibliográficas

Andrade, C. (2008). *De la mano al cerebro; sobre la construcción de los racionales sin signo (Q^+) con base en la didáctica de la matemática de Federici.* Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs*, 41-63.

Federici, C. (2001). *Sobre la resolución de problemas y la numerosidad*. Bogotá: Fondo de Publicaciones del Gimnasio Moderno.

Federici, C. (2004). *Una construcción didáctica del Sistema de Numeración Decimal*. Bogotá: en imprenta.

Heidegger, M. (1988). *El ser y el tiempo*. México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (1983). *La psicología de la inteligencia*. Barcelona: Editorial Crítica.