

## COMUNICANDO CAMBIOS EN EL TIEMPO: ELEMENTOS PARA UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Eduardo Carrasco Henríquez, Leonora Díaz Moreno

U. de Valparaíso, U. Metropolitana de Ciencias de la Educación  
ecarrascr17@yahoo.com, leonoradm@yahoo.es

Chile

Campo de investigación: Visualización, Gráfica y funciones,  
Pensamiento Variacional

Nivel: Básico, Medio

**Resumen.** *Con el objeto de mejorar la apropiación de herramientas para el pensamiento variacional, el presente trabajo presenta indagaciones realizadas en torno a gráficas de variación en el tiempo, en especial aquellas de distancia en el tiempo. Entendemos que construir aprendizajes implica introducir al estudiante en prácticas matemáticas que potencien las nociones a construir, por ello reconocer las situaciones en que las gráficas distancia-tiempo y, en particular el tiempo, son necesarios para comunicar y trabajar con cambios, se torna central. El presente reporte da cuenta de experiencias exploratorias con base en la necesidad de comunicar cambios, recurriendo a representaciones gráficas, de modo de constatar en qué situaciones se representa al tiempo en tales gráficas.*

**Palabras clave:** tiempo, graficación, visualización matemática

### Antecedentes

A partir de un marco de investigación socioepistemológico hemos trabajado en torno a las dificultades que estudiantes muestran al interpretar gráficas de variación en el tiempo. Hemos reportado que poder interpretar el tiempo y recuperar la evolución del parámetro que se grafica es una actividad compleja, en especial si es una gráfica distancia tiempo. Varios autores (Dolores 2004, Arrieta 2003) muestran como estudiantes reconocen una gráfica distancia tiempo como la trayectoria del móvil. Si consideramos por otra parte que la comunidad matemática ha construido una representación metafórica del tiempo como una distancia (Lakoff y Núñez, 2000) reconocemos a la gráfica como una traza de un punto sobre la hoja -es decir, una trayectoria- se requiere por tanto entender ese desplazamiento temporal metafórico para interpretar la gráfica de variación en el tiempo. De igual modo, la construcción de gráficas desde el fenómeno implica poder abstraer las relaciones y covariaciones del tiempo con los parámetros relevantes a describir. Un

846

tiempo que se nos presenta al entendimiento de modo complejo, a partir de nuestra experiencia temporal subjetiva, que no está presente en la imagen directa que nos dan los sentidos. Ellos están principalmente focalizados en las variaciones de posición, temperatura, color, olor, por nombrar algunas. Toboso (2005) señala que el tiempo se le presenta a cada persona en una experiencia que se construye de modo subjetivo en sus proyecciones intencionales al futuro y en sus retenciones del pasado, también intencionales, para actuar en una situación a la vez con lo que recuerda y con aquello que proyecta. Los trabajos de Piaget sobre la construcción de una noción temporal en los niños, señalan que se constituye en la secuencia de imágenes, en reconocer que pasó y que viene. Se va constituyendo entonces un tiempo que es subjetivo, interno a la persona y cuya evolución varía de acuerdo a nuestros estados de ánimo, es irreversible a diferencia del tiempo matemático, que es isotópico, continuo y reversible. Por ello comunicar lo que varía, si se refiere a un desplazamiento, no requiere al tiempo. Nos basta con mostrar la trayectoria que éste ha tenido y

en esa trayectoria recuperamos nuestra experiencia temporal en un acto imaginativo.

En una mirada breve al devenir histórico, notamos que la actual forma de graficar variaciones en el tiempo, se constituye en un largo proceso en el tiempo y sobre la base principal de metáforas geométricas. En efecto, Oresme<sup>16</sup>, quien señala la necesidad de construir un “dibujo de lo que varía”, amplía las herramientas para

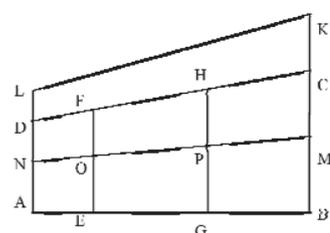


Fig. 1

el estudio de la variación, al construir un dibujo geométrico de lo que varía para todo tipo de magnitudes y no solo graficar lugares geométricos. Señala Oresme: “supongo, por lo tanto, que el dolor es una cierta cualidad del alma que se extiende en el tiempo y se intensifica por grados. Entonces es posible que dos de estas cualidades sean iguales y, más

<sup>16</sup> Nicolás de Oresme nació en Normandía, alrededor del año 1323, fue profesor en el colegio de Navarra, emplazado en donde hoy está la Escuela Politécnica de París, y murió en 1382, siendo obispo de Lisieux,

aún, una sea más inevitable y peor que la otra. Esto puede suceder en dos formas: a) Como el resultado de una diferencia en intensidad; y, b) Como resultado de una diversidad en la configuración de su deformidad. Como ejemplo del primer caso, sean A y B dos dolores, donde A es dos veces más intenso que B y de la mitad de extensión (...) El dolor A es asimilado a un cuadrado, el dolor B será asimilado a un rectángulo (donde el lado más largo denotará la extensión y cada alto, la intensidad del dolor en un punto de la extensión)”<sup>17</sup>. Con ello Oresme incorpora la potencialidad del dibujo geométrico al estudio del devenir de las cualidades.

Desde entonces, la evolución temporal comienza a ser representada mediante una línea continua.

Podemos ver que en su dibujo, Galileo coloca el tiempo (segmento AB, Fig. 2) paralelo al desplazamiento (segmento CD) y perpendicular al tiempo, coloca la velocidad.

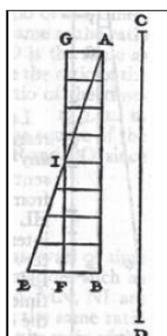


Fig. 2

Gráfica que construye bajo la premisa del desplazamiento de un punto. Por su parte, en gráficas de variación de distancias - como las reseñadas por Tartaglia - no se muestra al tiempo sino solo trayectorias. Posteriormente, los trabajos de Fermat y Descartes respecto de la geometría Analítica permiten el estudio de de ecuaciones a través del significado de las curvas y el estudio de curvas definidas por ecuaciones, en la cual dos cantidades desconocidas en una ecuación, más bien entendidas como segmentos, uno medido horizontalmente (x en Fig. 3) a

<sup>17</sup> 1353, Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum.

la derecha de un origen y el otro como una ordenada vertical ubicada en el extremo del primero (y en Fig. 3), dan origen a una curva o lugar geométrico, permitiendo que herramientas geométricas se usen para resolver problemas algebraico y viceversa. De este modo Newton tiene a su

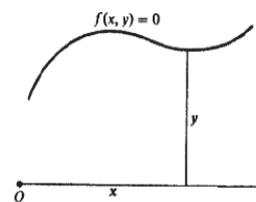


Fig. 3

disposición una amplia gama de marcos conceptuales para su trabajo con el movimiento, permitiéndole conformar su paradigma geométrico en cual gráfica es el resultado de la traza de un punto que se mueve. Por su parte Newton entiende el tiempo, como “eterno e infinito, omnipotente y omnisciente; esto es, su duración se extiende desde la eternidad a la eternidad y su presencia del infinito al infinito...” (Principia), configurando un tiempo externo a las cosas. Sin embargo para el estudio de las curvas o más bien los problemas de un espacio que es atravesado por algún movimiento local”, considera a las “cantidades [que conforman la curva, es decir las coordenadas  $x$  e  $y$ ] como si fueran generadas por incrementos continuos, a la manera de un espacio descrito por el recorrido de un objeto que se mueve” (Newton, 1736). El tiempo ha de ser entonces representado en la curva por una cantidad que se incrementa de modo continuo. Así logra trabajar con un tiempo más manejable que el ya descrito o “formal”, y entonces recurre a la noción de duración que es aquella “cantidad a través de cuyo incremento o flujo uniforme se expresa y mide el tiempo” (Díaz, 2005). Posteriormente la comunidad matemática logra una representación del tiempo a partir de una metáfora de flujo continuo, coherente con la representación como la línea continua, que porta números reales. Como señala Lakoff y Nuñez (2000) “El tiempo es distancia” y desde ahí surge el tiempo isotópico e irreversible y dando un contexto para el trabajo con el tiempo formalmente entendido y alejado de aquel que construimos en nuestra cotidianidad.

En resumen, la gráfica porta en su construcción e interpretación propiedades de desplazamiento (es la traza de un punto) sobre una superficie, pero sin embargo en su

interpretación la variable tiempo, ha de ser significada desde la variación en distancia geométrica que se aprecia en la variación temporal de la variable que se analiza.

### Experimentación

En el marco del trabajo realizado en el proyecto Fondecyt 1030413 (Díaz, Gutiérrez, Ávila y Carrasco, 2006) se solicitó a estudiantes de décimo año escolar que describiesen situaciones de cambio para comunicarlas a quienes no las presenciaron, siguiendo en esta actividad, la metodología usada por Arrieta en su trabajo doctoral (Arrieta 2003) Se definieron dos situaciones que grupos distintos verían y comunicarían de modo escrito a quienes no las hubieren presenciado. Ellas fueron: i) Tres desplazamientos del docente por la sala. El primero a velocidad constante, el segundo comenzando más rápido que el primero y terminando de modo más lento, y, el tercero de modo inverso al segundo; e ii) Escuchar los primeros 45 minutos de una melodía a base de percusiones, que comienza con unas campanas a intervalos regulares y poco a poco incorpora otros instrumentos de percusión.

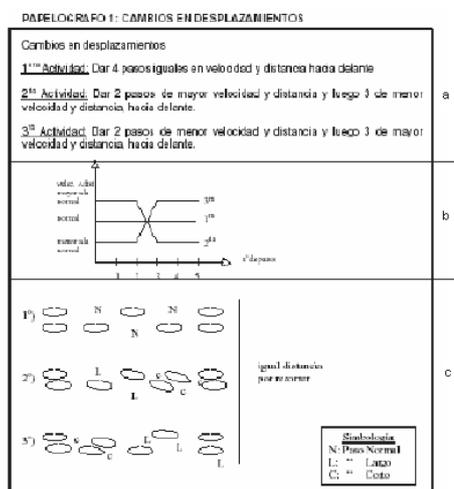


Fig.4<sup>18</sup>

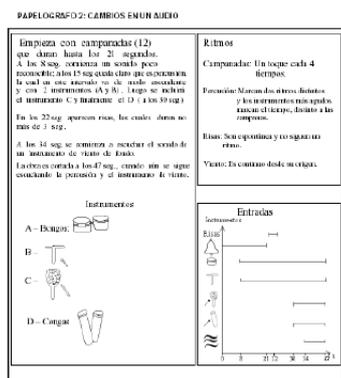
El objetivo de la experiencia fue relevar las herramientas que usan los estudiantes para comunicar cambios en el tiempo y, en particular, si recurren al tiempo en su comunicación.

Respecto de la primera situación los estudiantes recurrieron a un relato y a una gráfica en ejes cartesianos, que no incorpora el tiempo y el dibujo de los pasos del docente (fig. 1a ). Si nos focalizamos en

<sup>18</sup> Díaz et al, 2006; pp. 105

la descripción de la distancia recorrida, los estudiantes dibujan la trayectoria, es decir, marcan las huellas que dejarían los pasos del docente, y revelan una estrategia no efectuada por el caminante, a mayor velocidad los pasos son más largos (fig. 1c). El tiempo por tanto queda implícito, abierto a la reconstrucción del lector de la trayectoria. Por su parte recurren a un plano cartesiano cuando necesitan mostrar la velocidad del desplazamiento, otra variable a describir. En éste, si bien no marcan el tiempo en el eje de las abscisas, colocan el número de pasos dados, entendidos como marcas regulares. Numerizan el avance de los pasos como un reloj pone números al avance de los segundos. En el eje de las ordenadas representan la velocidad. Observamos en su producción escrita, que el foco de atención de los estudiantes estuvo en lo visible y lo corporal: en la dirección (hacia delante), cantidad de pasos (cinco), tipo de paso (largo, normal o corto) y velocidad (cualitativa corporal al sujeto en una especie de simbiosis velocidad/distancia). Usan, para la rapidez del desplazamiento, en una primera mirada, categorías dicotómicas respecto a un referente (en este caso el primer desplazamiento que llaman normal), señalan que la rapidez es mayor/menor que la rapidez del primer desplazamiento, dando cuenta de categorías dicotómicas de entendimiento (Díaz, 2005).

El segundo fenómeno consistió en los primeros 45 minutos de una melodía con base en percusiones (candombe Uruguayo).



Fig<sup>19</sup>. 5

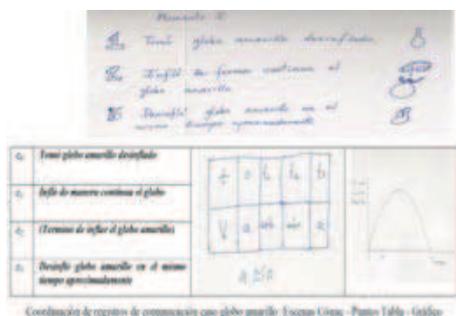
Los estudiantes en esta situación reconocieron los diferentes sonidos presentes en la grabación y también su duración. No obstante, no precisan exhaustivamente en su descripción de “lo que cambia”, la intensidad de los sonidos.

<sup>19</sup> Díaz et al, 2006; pp. 108

El tiempo surge en sus descripciones relacionado o codefinido por el vocablo ritmo. En esta situación, que no se presenta visualmente y en que los estudiantes se ven desafiados a comunicar la coordinación entre varios sonidos, emerge un tiempo paramétrico y que coordina acciones (Toboso, 2005; Carrasco, 2006). El gráfico utilizado incorpora naturalmente un eje temporal. Este permite la articulación de los sonidos, los cuales se van representando mediante segmentos de avance continuo. En el eje de las ordenadas se representan los diversos instrumentos. Esta situación muestra la necesidad de un tiempo coordinador que permita entender la articulación de los sonidos de éstos. De igual forma que en el fenómeno anterior, los estudiantes recurren a descripciones textuales del fenómeno (Díaz et al, 2006).

Por su parte, Díaz (2007b) muestra que cuando a un grupo de profesores de matemática se les enfrentó a la tarea de describir el fenómeno de inflado de un globo, con igual consigna que a los estudiantes, describir cambios por medios escritos a quienes no vieron los cambios, el profesorado recurre al cómic como su primer medio de comunicación (ver figura 2). Los profesores añadieron al cómic los registros tabular y gráfico (ver figura 3). En términos de Gubert (1987; p.222, citado en Díaz, 2007b): *"Los cómics iconizan la temporalidad en forma de espacios cambiantes contruidos por imágenes icónicas fijas"*. En las producciones docentes señala Díaz (op.cit.; p. 417) *"se trata de una forma de comunicación que construye su articulación narrativa por medio de imágenes fijas y textos complementarios. Habrá tantas escenas fijas como las "omisiones/novedades" que por un lado separan y por otro ligen a dos eventos consecutivos. Quien lee construye su conciencia de temporalidad atendiendo mentalmente a la sucesión de los hechos o eventos, su duración y la duración del intervalo entre ellos -a través de la omisión/novedad que separa y enlaza a dos dibujos consecutivos. Entonces el tiempo de la actividad será la agregación de la duración de cada evento y la duración de cada intervalo entre ellos, levantándose una estimación cualitativa de tiempos desde la conciencia temporal que favorece el cómic"*. Observamos que el cómic funge como herramienta de trabajo en

procesos de construcción de la temporalidad sico-social que describiera Piaget cuando señala que el tiempo paramétrico - cotidiano se construye en una sucesión de “imágenes



Fig<sup>20</sup>. 6

de los hechos”. En la herramienta del cómic las secuencias sucesivas de imágenes cambiantes informan variaciones en el tiempo y permiten una mejor construcción de tablas y gráficas constituyéndose en un eslabón importante en la modelización del fenómeno.

## Conclusiones

Se reconocen elementos centrales al trabajo con la graficación de variaciones en el tiempo. En primer lugar, entender al tiempo matemático como una construcción de la cultura matemática. Por ello requiere de mediaciones didácticas para que los estudiantes la hagan propia. El tiempo matemático-escolar queda implícito en las descripciones gráficas de trayectorias de movimiento del docente por la sala. Surge en la descripción gráfica cuando el estudiantado debe comunicar coordinaciones de sonidos musicales, más que desplazamientos. Noción cotidiana de un tiempo de coordinación de acciones, un tiempo paramétrico-social, cercano al tiempo matemático y que pone en escena el estudiantado para describir coordinación de variaciones de uno o más parámetros. Tiempo que ha construido en sus actividades diarias el estudiantado (Carrasco, 2006) y que difiere del que ha construido la comunidad matemática.

Un segundo elemento, es el cómic o secuencia de imágenes, como elemento central del momento genético de la representación de variaciones en el tiempo. Elemento recurrido

<sup>20</sup> Díaz 2007b;

tanto por profesores - investigadores (Díaz, 2007b) como por los alumnos cuando necesitan representar y entender situaciones de cambio en el tiempo (Díaz et al, 2006).

Un tercer elemento, que reconocemos en el trabajo con gráficas, es la posibilidad del estudiante de incorporar a sus argumentaciones marcos conceptuales que son evocados en la visualización de estas. Argumentaciones que responden a las redes de significado que el estudiantado enacta en el ambiente gráfico. Redes construidas tanto en su experiencia escolar como en su biografía de vida (Ávila, 2006).

Podemos por tanto considerar a las gráficas como espacios de argumentación, en el sentido de abrir, desde la imagen, la posibilidad de construir argumentos sobre el fenómeno, evocando para la construcción argumentativa, diversos campos conceptuales tanto de la propia matemática, como son: otros registros de representación (algebraico, analítico, tabular); experiencias de desplazamiento espacial, “la gráfica sube hacia la derecha”, “hacia la izquierda de la gráfica los puntos están más abajo”; o, nociones culturales del tiempo, usadas para trabajar con la gráfica, construcciones sociales que el estudiantado enacta al trabajar con gráficas de variación en el tiempo (Carrasco, 2006).

### Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003) *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav, México.

Ávila, J. (2006). *Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México

Ávila, J. Carrasco, E. (2002) *Dificultades en la interpretación de gráficas*. Ponencia presentada a la XVI RELME. La Habana, Cuba.

Boyer, C. (1999) *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral R. (2000) *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Editorial Trillas. Mexico.

Carrasco, E. (2006) *Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*. Tesis de maestría no publicada, Cicata, México.

Díaz, L. (jul.; 2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. En *RELIME*, Vol. 8, Núm. 2, julio, 2005, pp. 145-168

Díaz, Gutiérrez, Ávila y Carrasco (2006) *Las representaciones sobre la variación y su impacto en los aprendizajes de conceptos matemáticos*. Proyecto Fondecyt N°1030413. Informe Final. Santiago de Chile.

Díaz, L. (2007a) *Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación*. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano (pp. 287-308)*. México DF, México. Díaz de Santos-CLAME A.C.

Díaz, L. (2007b) Coherencias Cognitivas vs Matemáticas en el Estudio del Cambio. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 20., pp. 394-399. México, D.F.

Dolores C., Guerrero, L.A. (2004) Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores y estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 17. Chile.

Hitt, F (1998) Visualización Matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista de Educación Matemática*, vol. 10, nº 2, pp. 23-45. GEI. México

William H. (fl. ca. 1350) *Uniform and Nonuniform Motion and The Merton College Mean Speed Theorem*. [Versión electrónica] Translated by Ernest A. Moody Reprinted in A Source Book in Medieval Science (pp.237- 241) from *The Science of Mechanics in the Middle Ages*.

Lakoff, G. Núñez, R. (2000) *Where Mathematics Comes From, How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. EEUU: Basic Books.

Newton, I. (1736) *Tratado de Método de Series y Fluxiones*. Traducción Iztaccíhuatl Vargas. Primera Edición (2001), Servicios editoriales de la Facultad de ciencias, UNAM. México

Oresme N. (1370) *Tractatus de configurationibus qualitatuum et motuum*. [Versión electrónica] English translation, and commentary by Marshall Clagett. Univ. of Wisconsin Pr., 1968. Madison, Wisconsin

Osorio J. (2004) *Metáfora y Análisis Conceptual del Discurso*. Obtenido el 10 de julio del 2004 de <http://www2.udec.cl/~prodoci/serie/>.

Roth, W.-M. (2004). Emergence of graphing practices in scientific research. [version electrónica] *Journal of Cognition and Culture*, 4, 595-627.

Toboso, M. (2003). Tiempo y sujeto: nuevas perspectivas en torno a la experiencia del tiempo. *A Parte Rei. Revista de filosofía* v(27) . Obtenido en agosto 30 de 2007, de <http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/toboso.pdf>