

LA NOCIÓN DE PREDICCIÓN EN MATEMÁTICAS. UN ANÁLISIS CUALITATIVO TRANSVERSAL

Alejandro López, Landy Sosa

Universidad Autónoma de Yucatán

j.alejandro.lopez.renteria@gmail.com, smoguel@uady.mx

(México)

Resumen. En este artículo se discuten los procesos de construcción de conocimiento escolar relacionados con la noción de predicción matemática. Se evidencian condiciones socioculturales y acciones que favorecieron en jóvenes de distintos niveles educativos la movilización de recursos de construcción de conocimiento asociado al Cálculo, observadas en la experimentación de actividades predictivas de naturaleza variacional en escenarios numéricos y gráficos

Palabras clave: predicción, recursos, construcción, conocimiento

Abstract. This article discusses the processes of construction of school knowledge related to the notion of mathematical prediction. Its evident sociocultural conditions and actions that favored young people from different educational levels of resource mobilization for the construction of knowledge associated with the Calculus, observed in testing predictive nature activities variational numerical and graphical settings.

Key words: prediction, resources, construction, knowledge

Introducción

En este artículo se problematiza el carácter de la actividad matemática escolar con relación a la del quehacer científico, a propósito de la noción de predicción matemática asociada a la construcción de conocimiento en Cálculo. Una mirada epistemológica a la actividad de la comunidad científica de los siglos diecisiete y dieciocho que generó conocimiento en Cálculo y Análisis, sentó las bases para el diseño de actividades predictivas que se experimentaron con estudiantes de diferentes niveles educativos. Se reportan los recursos y herramientas que emplearon tales estudiantes para predecir, evidenciándose aspectos socioculturales en su actividad que hacen plausible vislumbrar condiciones para construir conocimiento matemático relativo a la noción de predicción en contexto escolar.

Según (Cordero, 2005, citado por Sosa y Aparicio, 2009) es posible distinguir al menos dos tipos de actividades matemáticas: la actividad matemática científica y la actividad matemática escolar. La primera, se compone de un conjunto de acciones que el científico pone en juego para entender, explicar y dar respuesta a determinadas situaciones o necesidades sociales, por ejemplo, estimar, medir, razonar, argumentar, generar modelos y estructuras, entre otras. Por su parte, la segunda se orienta más al entendimiento del lenguaje y las estructuras de la matemática misma.

Carácter de la actividad predictiva escolar y científica

La investigación toma como punto de partida el supuesto que la epistemología de la actividad de predicción matemática en la escuela es discordante con la del quehacer de las comunidades científicas, poniendo de manifiesto una marcada separación entre los procesos de construcción de conocimiento entre lo científico y lo escolar, sobretodo en la matemática (López, 2010). Por ejemplo, en el texto de Cálculo I, usado en las escuelas preparatorias de nuestra universidad, se presentan situaciones como la siguiente:

Una inyección de x gramos de cierta droga resulta una disminución de la presión sanguínea de $D(x) = 0.5x^2 - 4x$ milímetros de mercurio. Hallar la sensibilidad a 4 gramos de esa droga. La sensibilidad se define como la tasa de cambio de la presión sanguínea, medida en mm de mercurio, con respecto a la dosis (Quijano y Navarrete, 2000, p.119).

Una solución de esta situación sería como sigue: *La sensibilidad de la droga está dada por la derivada de la función $D(x)$, es decir, $D'(x) = 1.5x - 4$. Así, basta sustituir el valor $x = 4$ en la fórmula obtenida para hallar (calcular) la sensibilidad a la dosis indicada.*

La predicción matemática es la actividad que subyace este tipo de situaciones, más no en un sentido estricto de su significado, sino que dicha actividad se restringe al empleo de técnicas y recursos escolares tales como: la reproducción y mnemotecnica (el cálculo de tasas de cambio se asocia con derivar); lo algorítmico (aplicar la técnica algebraica para derivar una función polinomial); la sustitución (reemplazar una variable por un valor numérico). No se precisa entonces desarrollar recursos, estrategias ni habilidades para relacionar variables, cuantificar cambios, analizar el comportamiento de un sistema de cambios, etc., acciones propias de la actividad predictiva en las ciencias. Véase en éste un ejemplo del carácter distinto de la predicción en el ámbito escolar y el científico, que se acentúa más al mirar la actividad predictiva de científicos como Newton.

Newton buscaba explicar la forma en que cambia la posición de un objeto respecto a un sistema de referencia, cuando éste experimenta una fuerza externa. Su trabajo lo desarrolla en condiciones ligadas a la necesidad de predecir el movimiento de objetos con atención en el cambio, intentando entender el comportamiento de cómo varía lo que varía a partir de analizar un elemento infinitesimal del sistema de cambios. Destaca su segunda ley de movimiento, con la que explica la aceleración y relación cuantitativa entre inercia y fuerza, expresándola en la forma $F\Delta t = m\Delta v$, un modelo de relación entre magnitudes variables.

Según Cantoral (2001) citado por Alatorre, López y Carrillo, (2006) la predicción de fenómenos de flujo continuo de la naturaleza, concitó la generación de conocimiento matemático y científico en Cálculo y Análisis. Así, una visión epistemológica del quehacer de la comunidad científica interesada en el estudio de dichos fenómenos, dilucidó características de la actividad predictiva en el campo científico, tales como: la identificación de variables, el establecimiento de relaciones entre magnitudes fijas y variables (por ejemplo, fuerza y masa, tiempo y velocidad), la formulación de conjeturas sobre cómo varía lo que varía, el análisis global del comportamiento global de un sistema de cambios, la generación de modelos y su validación.

En nuestra investigación nos interesamos entonces en explorar el estatus de la noción de predicción en el ámbito escolar, traduciendo para ello las condiciones de la actividad científica de carácter predictivo en la generación de un escenario que pudiese favorecer la construcción de conocimientos y recursos matemáticos en estudiantes de diferentes niveles educativos, mediante la resolución de situaciones variacionales asociadas al concepto de límite (o convergencia). En ese sentido, planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿Qué tipo de conocimientos y recursos matemáticos son empleados por estudiantes ante situaciones específicas de predicción matemática?

Socioepistemología de la predicción

En diversas investigaciones enmarcadas en la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2004; Alatorre, López y Carrillo, 2006) se señala que la *predicción* es la idea germinal en el estudio de los fenómenos de cambio en la naturaleza, favorecedora de la construcción de conocimiento matemático ante la necesidad de adelantarse a los acontecimientos, de revelar lo que habrá de suceder.

Este marco teórico nos permitió reconocer condiciones de construcción de conocimiento matemático en torno a la noción matemática de predicción, considerando los procesos de sistematización de “las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza” (Cantoral, 2004, p.1).

Así, el fijar la mirada en la epistemología de la práctica de predicción identificamos que una condición (social) que desentrañó mecanismos para predecir sobrevino de la necesidad del ser humano de anticipar lo que habrá de suceder en su entorno, por ejemplo, conocer el comportamiento de lo que fluye dio lugar al desarrollo de formas de pensamiento propias de una época determinada. Se observó además que, desde la antigüedad y hasta la fecha, una circunstancia en la construcción de conocimiento matemático ha sido el uso de tablas

numéricas y gráficas como herramientas predictivas en la práctica de diversas comunidades científicas y no científicas. Por ejemplo, los astrónomos babilonios registraban en tablillas de arcilla datos sobre las posiciones de los astros y planetas para identificar ciertos patrones de regularidad y predecir su movimiento (López, Sosa y Aparicio, 2010). Respecto al uso de gráficas, consúltese el trabajo de Tuyub (2008) por citar alguno en el que se proporciona evidencia de su papel en la generación de conocimiento, en una comunidad de toxicólogos.

Método de investigación

La conjunción en forma sistémica de aspectos epistemológicos y cognitivos de la actividad predictiva científica, bajo la ingeniería didáctica como metodología de investigación, nos dieron la pauta para el diseño experimental de una secuencia de cuatro actividades predictivas sobre el movimiento de partículas, a partir de información numérica y gráfica sobre su relación posición-tiempo. Véanse dos de las actividades de la secuencia.

Actividad I

En el análisis a priori de esta actividad se consideraron como variables: lo variacional en el movimiento de tres partículas que se alejaban de un objeto fijo, la predicción de un estado ulterior de la posición de éstas a partir de información de estados iniciales del movimiento y el la representación de dicha información en un registro numérico (Imagen I). Se esperaba que los estudiantes analizaran de manera cuantitativa y cualitativa la variación del movimiento para identificar el comportamiento global de la divergencia de cada partícula. En otras palabras, el análisis de la serie de transformaciones o cambios en estados iniciales del movimiento les permitiría predecir un estado ulterior del mismo.

Partícula 1		Partícula 2		Partícula 3	
Tiempo (s)	Distancia (m)	Tiempo (s)	Distancia (m)	Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0.000	0	0.000	0	0.000
1.5	3.000	1.5	1.660	1.5	2.077
3	6.000	3	3.948	3	4.637
4.5	9.000	4.5	6.554	4.5	7.429
6	12.000	6	9.391	6	10.386
7.5	15.000	7.5	12.412	7.5	13.472
9	18.000	9	15.588	9	16.667
10.5	21.000	10.5	18.901	10.5	19.955
12	24.000	12	22.335	12	23.325
13.5	27.000	13.5	25.877	13.5	26.770
15	30.000	15	29.520	15	30.282

Imagen I. Tablas de la posición de tres partículas que divergen de un objeto fijo.

Actividad 2

En la actividad dos, se retoma la situación anterior de movimiento en un registro gráfico (Imagen 2). Se trata de una actividad predictiva en cuya resolución se esperaba que los estudiantes establecieran comparaciones o diferencias entre distintos estados del movimiento de las partículas para obtener características de las transformaciones que los articulan para predecir un estado ulterior. Esto precisaría que los estudiantes desarrollaran recursos o codificaciones para convertir información de un registro a otro.

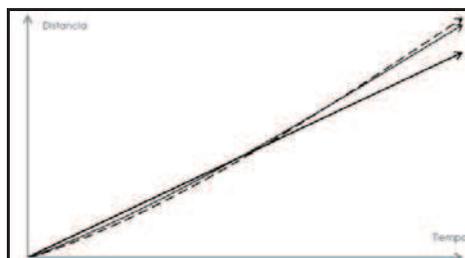


Imagen 2. Gráfica de la posición de tres partículas que se alejan de un objeto fijo.

Las actividades se experimentaron con una población de nueve estudiantes de nivel educativo básico, medio y superior (tres por cada nivel). El instrumento se implementó por nivel educativo, con un tiempo de veinte minutos para la resolución de cada actividad. Las soluciones de cada estudiante se registraron en video y por escrito.

Recursos empleados por estudiantes para predecir

Los datos recabados en la experimentación evidencian que, en un contexto específico, jóvenes escolares de diferentes edades pueden desarrollar estrategias y recursos matemáticos y no matemáticos para predecir. Del análisis a posteriori de la actividad uno se concluyó que, a partir del análisis cuantitativo de las variaciones y su interpretación cualitativa, los jóvenes pudieron determinar la ley del comportamiento global de cambios en el movimiento de las partículas para anticipar un estado ulterior de la posición de las mismas, lo cual puede observarse en los siguientes episodios de la experimentación.

Episodio 1. Socialización de la solución de un joven de educación superior.

... la partícula dos es la que estará más alejada en el tiempo pedido (un estado ulterior del movimiento, en el tiempo $t = 25$ segundos), ya que conforme transcurre cada lapso de tiempo, es la que más avanza...

Este argumento lo basó en la cuantificación de las diferencias que efectuó sobre los valores de la columna “Distancia” de la tabla de la partícula 2 (imagen 1), donde además se percibe el cálculo de las segundas diferencias.

Primeras diferencias de la "Distancia"	Segundas diferencias de la "Distancia"
2.792	
2.957	0.165
3.086	0.129
3.195	0.109

Tabla 1. Cálculo de diferencias finitas correspondiente a la variación de la posición de la partícula 2.

Episodio 2. Socialización de la solución de una joven de educación media (ver imagen 3).

Descarté la partícula uno porque vi que *avanzaba igual* (con variación constante). Noté que la partícula tres empezó *avanzando mucho*, pero como que... (Hace una seña con la mano indicando algo pequeño) conforme avanza el tiempo *avanza poco*. En cambio la partícula dos *avanza más* conforme pasa el tiempo (hace una seña con su mano indicando que algo pequeño crece cada vez más rápido), y si sigue así a los veinticinco segundos, la partícula dos va a quedar primero que la tres.



Imagen 3. Argumentación de una estudiante de nivel medio sobre el desplazamiento de las partículas.

Del análisis a posteriori de la actividad dos se observó que los estudiantes se basaron para predecir, por un lado, en establecer códigos entre los registros numérico y gráfico de forma bidireccional y, por otro, en el entendimiento del comportamiento global de la posición de las partículas, a partir de la comparación o diferencias entre estados.

Episodio 3. Socialización de la solución de una joven de educación básica (secundaria).

La línea gruesa es la uno (señala la primera tabla dada y la gráfica de línea gruesa), porque es recta y la uno... siempre va aumentando su *velocidad* conforme *múltiplos de tres*: tres, seis, nueve, doce, quince, son números que son *constantes* (refiriéndose a la variación); la línea punteada es la dos (señala y recorre la segunda tabla hacia abajo, al tiempo que lo hace con la gráfica de izquierda a derecha), porque primero *va más lento* que las demás, pero *después* de un tiempo parece que *las supera*,...la delgada es la tres, porque *hay un punto* donde logra

superar a todas, *como acá* (señala un valor en la segunda tabla: partícula 2), pero después la supera la dos...

Sean **A, B y C** las gráficas que representan el movimiento de cada partícula. El razonamiento de tal estudiante se traduce como sigue.

El estudiante realizó gráficamente una serie de comparaciones (**T**) en estados diferentes de tiempo, es decir, **T** es la transformación que permite pasar de una gráfica a otra en un mismo estado de tiempo. En la imagen 3, **T₁** es la comparación entre el estado uno de **C** y el de **B**, y **T'₁** es la comparación del estado uno de **B**, y **A**. De igual modo, **T₂** es la comparación del estado dos entre **A** y **B**, y **T'₂** es la comparación del estado dos de **B** y **C**.

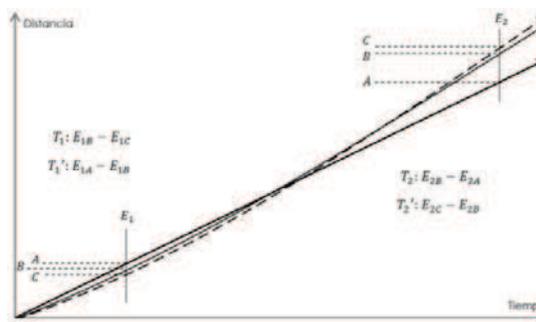


Imagen 4. Comparaciones (T) de las posiciones de las partículas en diferentes estados de tiempo

Como se mostró en los episodios anteriores, algunas de las acciones que caracterizaron la actividad predictiva de los estudiantes de diferentes niveles educativos fueron:

- Identificar lo que está variando (*conforme transcurre el tiempo avanza más: relación entre las variables distancia y tiempo*);
- Analizar la variación (*avanza constantemente, avanza igual, avanza más*);
- Reconocer la ley que describe el comportamiento del sistema (*primero avanza mucho... después avanza poco, si sigue así... llegará primero que la otra*);
- Estudio de elementos puntuales para el reconocimiento de lo global (*...hay un punto donde logra superar a todas...*);
- Desarrollo de estrategias para predecir un estado ulterior de una situación a través de comparar sus estados (*...primero va más lento que las demás... después las supera...*)

Así, en el análisis a posteriori se identificaron dos formas específicas de predicción:

- **E_i^T→E_f**. En esta forma de predicción se conoce información sobre o del estado inicial de una situación y a partir de una serie de transformaciones se obtiene información de un estado ulterior de la misma.

- $E_f \leftrightarrow E_i \rightarrow \frac{T}{M}$. Esta forma implica que a través de comparaciones o diferencias entre los datos de distintos estados de la situación, se obtengan características o datos de su comportamiento global.

Por otra parte, el discurso verbal y la gesticulación se hicieron presentes como medios para que los estudiantes validen sus predicciones, para sí mismos y sus demás compañeros. En sus argumentos se hallaban frases o palabras que hacían referencia a la velocidad o rapidez en que variaba el desplazamiento de las partículas, pese a que en tablas y gráficas se presentaba información explícita solamente de la relación posición-tiempo de las mismas, lo cual da muestra de la aparición nociones como derivada, variación, función y límite.

Conclusiones

El cambio de escenario en la actividad humana y matemática de estudiantes de diferentes niveles educativos a partir de actividades predictivas posibilitó en ellos el desarrollo de recursos y herramientas de construcción de conocimiento matemático, en particular el asociado al Cálculo. Una condición social que incidió en la actividad de los jóvenes escolares radicó en la necesidad que ellos enfrentaron de conocer el comportamiento de un sistema de cambios para predecir estados ulteriores de un fenómeno de flujo: el movimiento de partículas. Se detectó además, que la argumentación gestual y discursiva se convirtió en un medio de comunicación, convencimiento y validación de las predicciones entre pares de estudiantes, que emergió de la necesidad de explicar cómo cambia lo que cambia, lo que favoreció que discutieran ideas asociadas a los conceptos función, límite y derivada.

Se divisa en este contexto la viabilidad de modificar la actividad matemática escolar en Cálculo o Precálculo, de modo que se favorezca el desarrollo de habilidades de pensamiento y construcción de conocimiento matemático, al tiempo que promover una visión de científica del quehacer escolar. Para ello se precisa diseñar actividades que impliquen tareas o acciones por parte del estudiante para identificar y relacionar variables, cuantificar cambios, plantear supuestos, formular conjeturas, generar códigos para transitar entre diferentes registros de representación, validar sus soluciones a través de la argumentación, entre otras; por encima de la reproducción y mecanización de procesos poco significativos para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Alatorre, H., López, I. y Carrillo, C. (2006). El carácter evolutivo de las prácticas sociales: el caso de la predicción. En G. Buendía (Presidenta), *Memoria de la X Escuela de Invierno de Matemática Educativa*, 12-21, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- López, J. (2010). Análisis de recursos y herramientas matemáticas empleadas por estudiantes en actividades predictivas. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México.
- López, J., Sosa, L., Aparicio, E. (2010). Predicción y construcción de conocimiento matemático. Un análisis clínico transversal. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa*, 1(1), 2-11. Mérida, Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.
- Quijano, Q. y Navarrete C. (2000). *Calculo I*. Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.
- Ramos, S. (2008). El contexto, la predicción y el uso de herramientas; elementos socioepistemológicos de la matematización de la economía. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 795-805. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Sosa, L. y Aparicio, E. (2009). Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN, México, D.F., México.