UTILIZACION DEL MODELO DE LAGRANGE PARA LA ENSEÑANZA DE EXTREMOS CONDICIONADOS

Martha Beatriz Fascella, Hugo Víctor Masía
Universidad Nacional de Rosario Argentina
mbfascella@yahoo.com, hvmasia@hotmail.com
Campo de investigación: Modelos Matemáticos Nivel: Superior

Resumen. *Existe gran cantidad de publicaciones que tratan del rol que cumple la Matemática en la Economía. Este tema, nos lleva a reflexionar sobre el papel que debe cumplir la Economía en las clases de Matemática y de qué manera debe enseñarse Matemática a estudiantes de Economía para facilitar la construcción del pensamiento lógico necesario para organizar, seleccionar, sistematizar la información que se nos suministra y para relacionar, integrar, inferir conceptos, ideas y principios matemáticos.*

En este trabajo se utiliza el Modelo de Lagrange con el objeto de motivar el aprendizaje de Extremos Condicionados para estudiantes de Economía, aunque tiene plena validez para ser aplicado en otras disciplinas.

Palabras clave: extremos condicionados, utilidad, modelos, economía

Encuadre teórico

Consideramos que la Matemática es una disciplina compleja y abstracta, características que se manifiestan en la dificultad que su aprendizaje significa para estudiantes de carreras para las cuales la Matemática es una herramienta instrumental y, como señala Hawkins (1997), muchas veces no se es consciente de lo abstracto que es el conocimiento que se considera "básico", de tal manera que lo que es sencillo para el docente puede ser inaccesible para algunos alumnos.

Según Chevallard (1997), un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse entonces, con una actividad de modelización matemática. Se caracteriza "el hacer matemática" como un trabajo de modelización. Este trabajo convierte el estudio de un sistema no matemático en el estudio de problemas matemáticos que se resuelven utilizando adecuadamente ciertos modelos.

De modo que la comprensión de conceptos se logra mediante la proposición y el análisis de problemas afines con la especialidad. Así, efectuamos las presentaciones en forma geométrica, numérica y algebraica, teniendo en cuenta que las representaciones visuales, la experimentación numérica y gráfica producen cambios en la forma de aprender el razonamiento conceptual. El uso de calculadoras y computadoras es un complemento a la hora de lograr una mejor calidad de la enseñanza pues el uso de software permite inmediatas verificaciones de propiedades, representaciones gráficas, así como resolución de problemas en situaciones reales, constituyendo una ayuda importante para la exploración inductiva del conocimiento por la inmediatez de la respuesta del procesador.

Mostramos en el trabajo una experiencia que parte del estudio de un modelo (Lagrange) generador, de otro modelo (Extremos Condicionados). Con esto queremos indicar que a partir de un problema procedente de un campo ajeno a la Matemática es posible pensar sobre las relaciones abstractas de otro campo conceptual en términos de nociones y propiedades matemáticas.

Metodología

La experiencia didáctica se enmarca en el Proyecto *"La comprensión de las ecuaciones diferenciales como herramientas de modelización",* que se inscribe a su vez en el Programa "*Enseñanza de la Matemática para no matemáticos* ", cuyo objetivo es desarrollar formas de pensar creativas, de constante búsqueda para la toma de decisiones correctas en el ámbito profesional. Este trabajo forma parte de estudios preliminares del Proyecto PICTO: "*La Educación Matemática como Ciencia de Diseño en la Formación Inicial Terciaria*",que trata del diseño, seguimiento e investigación de unidades de enseñanza en tópicos específicos incluidos en los contenidos curriculares de la llamada Matemática Básica en el nivel inicial terciario .

La experiencia se realiza en el curso Matemática III de segundo año de la carrera de Licenciatura en Economía, de la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, de la Universidad Nacional de Rosario, involucrando alrededor de ochenta alumnos semestralmente.

Encuadrada en una investigación aplicada, se enfoca la atención sobre la solución de problemas. En este caso el eje del desarrollo de la misma es la propuesta de un problema relativo al área de aplicaciones de la Matemática a la Economía.

Para el seguimiento y análisis se trabaja metodológicamente bajo un paradigma cualitativo con técnicas de observación participante, consignando las situaciones didácticas a que da lugar la interacción con el computador.

La observación designa la fase de la investigación consistente en familiarizarse con una situación o fenómeno determinado, en describirlo, en analizarlo con el fin de establecer una hipótesis coherente con el cuerpo de conocimientos anteriores ya establecidos y concierne a un grupo particular de individuos refiriéndose a resultados inmediatos interesando el perfeccionamiento de los implicados en el proceso, que así mismo involucra a los docentes.

El problema y el trabajo de aula

Partimos del supuesto de que un alumno de segundo año de la carrera que ya ha seguido al menos un curso de Economía, puede interesarse en problemas vinculados a su futura profesión. Elegimos el siguiente problema:

"Una empresa farmacéutica requiere para la elaboración de productos medicinales dos tipos de sustancias químicas, A y B . Llamemos con x e y a las cantidades requeridas de las sustancias A y B , respectivamente, y con $U(x, y)$ la *utilidad* obtenida al fabricar un producto cuya síntesis requiere distintas cantidades de las sustancias, según el proceso aplicado. La sustancia *A* tiene un precio de 2 u.m. (unidades monetarias) el gramo, la sustancia *B* tiene un precio de 1 u.m. el gramo, y el monto total asignado para la compra de ambas sustancias es de 400 u.m. Si la función de utilidad está dada por la fórmula $U(x, y) = xy + 2x$, la administración de la empresa desea maximizar su ganancia. Se pretende, en consecuencia:

- Hallar las cantidades de x e y que maximizan la función U, y el máximo nivel de utilidad que alcanza.
- Dibujar en un mismo gráfico la recta presupuestaria y las curvas de indiferencia correspondientes a los niveles de utilidad $U(x, y) = 18000$ y $U(x, y) = 22000$.
- Mostrar gráficamente el equilibrio del consumidor, considerando a la empresa como consumidora de las sustancias."

Presentada la situación problemática, los alumnos reconocen la necesidad de incorporar conceptos y procedimientos para responder a la misma que tiene que ver con el requerimiento de hallar valores máximos y/o mínimos de una función de dos o más variables reales que dejan de ser independientes por estar sujetas a condiciones que las vinculan.

Desarrollamos a continuación la teoría económica necesaria para su resolución.

El modelo de Lagrange permite maximizar o minimizar una función de dos variables con una restricción, y puede ser aplicado a dos situaciones: la búsqueda del equilibrio del consumidor dada una restricción presupuestaria y la minimización de costos para un nivel determinado de producción de una empresa. En nuestro caso será aplicado para determinar el *equilibrio del consumidor*.

Curvas de indiferencia: Dados dos bienes, *A* y *B*, puede representarse gráficamente la utilidad que éstos dan al consumidor a través de un mapa de curvas de indiferencia. En el eje de abscisas se representa la cantidad x del bien A, y en el de ordenadas la cantidad y 460 del bien B ., que el consumidor estará dispuesto a adquirir. Una curva de indiferencia es la gráfica de una relación que vincula todos los posibles valores de x e y para un determinado nivel de utilidad. Cada curva de indiferencia del mapa corresponde a un nivel de utilidad, teniendo una forma "descendente" ya que para mantener un mismo nivel de utilidad, el comprador estará dispuesto a adquirir cada vez menos del bien A por cada unidad extra de B que adquiere, y viceversa. Las curvas serán como las representadas en la Figura 1.

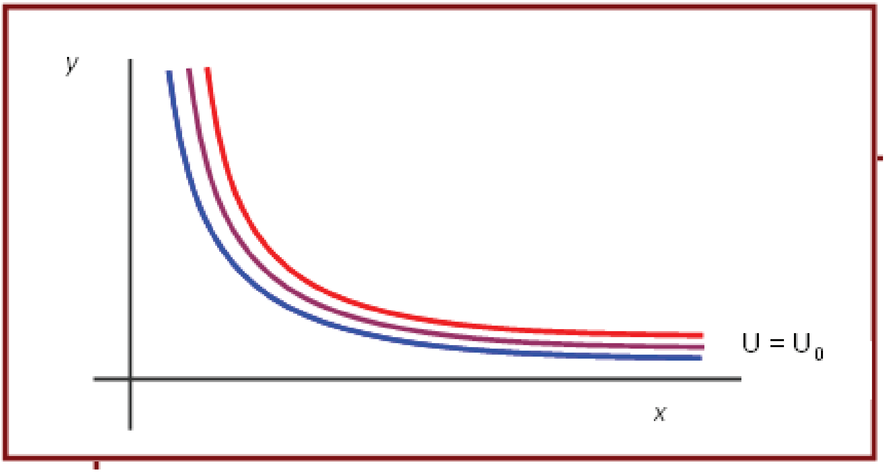

Figura 1

Las ecuaciones de las curvas son de la forma:

$$U(x, y) = U_0, \qquad (1)$$

donde x e y representan las cantidades variables de A y B , respectivamente. La ecuación (1) corresponde a la curva de indiferencia para el nivel de utilidad U_0 .

Manteniéndonos en la misma curva de indiferencia, la función $U(x, y)$ es constante, y el cambio en la utilidad total debe ser 0. Es decir debe verificarse

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy = 0 . \qquad (2)$$

donde $d\,x$ y $d\,y$ representan las variaciones de las cantidades de A y B , respectivamente.

Si el consumidor dispone de un monto m , para gastar en los bienes A y B , se tendrá:

$$p_A\,x + p_B\,y = m\,. \qquad (3)$$

Esta ecuación, en la que p_A y p_B son los precios de A y B respectivamente, y cuya gráfica es un segmento de recta, impone una *restricción presupuestaria* que vincula todas las posibles cantidades de A y B que pueden ser compradas con el nivel de presupuesto m .

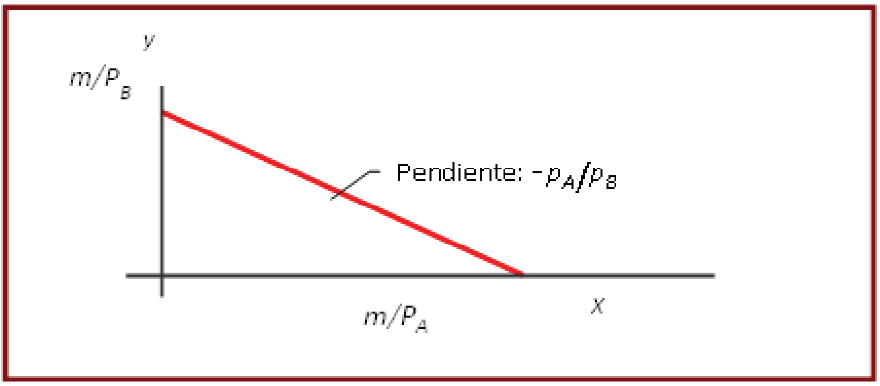

Figura 2

Equilibrio del consumidor: La condición de equilibrio del consumidor se da entonces cuando la recta presupuestaria toca en un solo punto, es decir es tangente a una curva de indiferencia, que corresponderá a las cantidades de A y de B con mayor nivel posible de utilidad con el presupuesto m . Así, en el punto de equilibrio la pendiente de la curva de indiferencia es igual a la pendiente de la recta de restricción presupuestaria. Ver Figura 3.

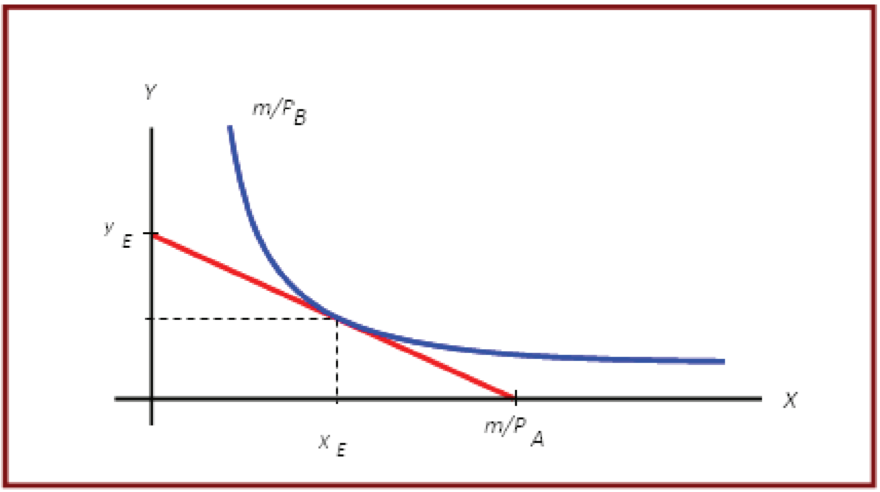

Figura 3

Maximización de utilidad: El problema consiste en hallar el valor máximo de la función de utilidad $U(x, y)$, llamada *función objetivo*, sujeta a la restricción presupuestaria

$$p_A x + p_B y - m = 0 \ .$$

El problema que se plantea es llamado un *problema de extremos condicionados*, y para su resolución se define la llamada *función lagrangeana* L :

$$L = U(x, y) + \lambda (p_A x + p_B y - m) \ .$$

El ambiente de interés provocado en el aula es aprovechado para desarrollar la teoría matemática necesaria para dar solución a problemas de esa clase, y a continuación aplicarlo a la resolución del problema planteado. Omitiremos en este trabajo el desarrollo de dicha teoría como así también la resolución numérica del problema.

Reflexiones a modo de conclusión

La experiencia en el aula nos permite concluir que los alumnos participaron activamente en el proceso de aprendizaje, relacionaron los conceptos matemáticos con los económicos. Por otra parte al utilizar un software que les permitió desviar la atención de la resolución hacia el análisis del problema, mostraron un mayor interés en los temas matemáticos y profundizaron los mismos con la finalidad de resolver problemas económicos más complejos relacionados con el problema propuesto inicialmente. Como consecuencia de ello, señalamos como un logro, la presentación de varios aspirantes para desempeñarse como ayudantes alumnos en la asignatura.

A partir de estos resultados, podemos citar a Jaim Etcheverry (1999) quien apunta que para que los alumnos aprendan, deben estar interesados en lo que aprenden ya que la razón se cultiva mejor cuando está asentada sobre una sólida base emocional; deben comprender que existe una secuencia en el aprendizaje y que el aprendizaje significativo y duradero se logra haciéndolo interesante, no divertido.

Es por ello que el carácter específico del conocimiento matemático y la importancia particular de las situaciones que se empleen en la enseñanza y la gestión de las mismas por parte del profesor, subrayadas por Brousseau (1986), hacen imprescindible centrarlas en el grupo de alumnos así como en el medio didáctico, que incluye los problemas, materiales e instrumentos que el profesor proporciona a los alumnos con el fin específico de ayudarlos a reconstruir un cierto conocimiento.

Brousseau, en su Teoría de las Situaciones Didácticas, atribuye un lugar preferencial a la resolución de problemas. En relación con el saber, la didáctica plantea que éste surge a partir de preguntas o problemas a los que el alumno se ve necesitado de dar respuesta. Además, señala que "la constitución del sentido, tal como la entendemos, implica una interacción constante del alumno con situaciones problemáticas, interacción dialéctica (porque el sujeto anticipa, finaliza sus acciones), donde él compromete conocimientos anteriores, los somete a la revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar concepciones nuevas". Sostiene también que "el interés de un problema va a depender esencialmente de lo que el alumno comprometa ahí, de lo que ahí someterá a prueba, de lo que invertirá, de la importancia para él de los rechazos que será conducido a hacer de las consecuencias previsibles de esos rechazos, de la frecuencia con la cual arriesgaría cometer esos errores rechazados y de su importancia. Así los problemas más interesantes serán aquellos que permitirán franquear un verdadero obstáculo".

Referencias bibliográficas

Blanchard, O., Pérez Enrri, D. (2000). *Macroeconomía*. Buenos Aires: Prentice-Hall.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7, (2).* 33-115

Chevallard, I., Bosch, M., Gascon, J. (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. *Cuadernos de educación.-22*. Barcelona, España: Horsori.

Jaim Etcheverry, G. (1999). *La tragedia educativa*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Chiang, A.C., (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática (4ª Edic.)*. Madrid, España: McGraw Hill.

García, A., Martínez, A., Miñano, R. (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las Matemáticas.* Madrid, España: Síntesis.

Hawkins, A., (1997). Forward to basics! A personal view of developments in statistical education. International Statistical Review.

Jagdish, A. y Lardner, R.W. (2002). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía. (4ª. Edic.)*. México, México: Pearson Educación.

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2001). *Cálculo* (8ª Edic.). México, México: Pearson Educación.

Samuelson, P.A. (2003). *Economía*. Madrid, España: McGraw Hill.