

## UN ACERCAMIENTO A LA VARIACIÓN POR ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR Y SUPERIOR, BASADO EN LA MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO

Leticia García Rivas, Magdalena Rivera Abrajan  
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero

México

leticia.garciarivas@gmail.com, magrivab@hotmail.com

Campo de investigación: Socioepistemología

Nivel: Medio Superior y superior

**Resumen.** *En este artículo presentamos los avances de una investigación que tiene por objetivo que los estudiantes de nivel medio superior y superior, a través de la evolución de la práctica social de modelación, en este caso tomamos el movimiento como fenómeno a modelar, construyan la variación como herramienta, para ello se adaptaron una serie de actividades que llevan al estudiante a partir de la comunicación del movimiento, pasando por lo lineal y lo cuadrático, a construir lo cúbico a través de la variación. Para ello utilizamos sensores de movimiento y la calculadora Class-Pad 300. La perspectiva teórica que asumimos es la socioepistemología e insertamos nuestro trabajo en la línea de investigación de las Prácticas sociales y la construcción social del conocimiento, aceptando a la práctica social de modelación como la base de nuestro diseño de aprendizaje, la cual es entendida como una práctica que combina el trabajo, la intervención en la naturaleza y la especulación matemática.*

**Palabras clave:** variación, modelación, movimiento, socioepistemología

### Introducción

La historia del conocimiento muestra que en numerosas ocasiones, diversas nociones y procedimientos matemáticos han surgido del proceso de comprender y transformar la naturaleza. Sin embargo, a pesar de este hecho, el peso que se les da a los fenómenos naturales, ya sean físicos, químicos, económicos, por citar algunos, en las clases de matemáticas es escaso.

Si pensamos en que los fenómenos naturales de alguna forma están relacionados con la variación, podemos asumir la importancia de la misma, como herramienta fundamental para la modelación de estos fenómenos. Dolores (1998) menciona “*Con el solo hecho de caminar experimentamos un cambio, y sabemos que estos cambios son mensurables*”.

### Problemática

Durante los años que pasamos en la escuela nos enseñan diversos conceptos matemáticos, desde los más básicos hasta llegar a conceptos complejos y poco entendibles para la mayoría de

nosotros, estos “conocimientos” permanecen separados unos de otros y generalmente no son utilizados fuera de la escuela, volviéndose conocimiento inútil e innecesario en nuestra vida.

La problemática general que planteamos en nuestra investigación surge con la desconexión entre lo que se enseña en la escuela y la vida cotidiana. (Arrieta 2003, Rivera 2005, Méndez 2008), Sin embargo esta separación es persistente en la misma escuela reflejándose en los distintos cursos de matemáticas. Así, las diversas herramientas matemáticas que construimos en la escuela aparecen desconectadas entre sí y sin significados prácticos.

Una de las herramientas matemáticas fundamentales en la formación escolar de los estudiantes, por ser punto medular para la comprensión de diversos conceptos fundamentales para el cálculo, como el límite, la derivada e integral, y visible en nuestra vida cotidiana es la variación, donde diversos estudios (Dolores, 1998; Catalán & Dolores, 2000; Dolores & Cuevas, 2007) han mostrado que en los estudiantes, tanto del bachillerato como los que principian la universidad, existe un escaso desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y por consiguiente su comprensión acerca de los conceptos, procedimientos y relaciones acerca de diversos conceptos matemáticos es deficiente, en la investigación de Cantoral & Molina (2006) muestran como los mismos profesores muchas veces no tienen presente a la variación. El objetivo principal de nuestro trabajo es que los alumnos construyan como herramienta la variación para poder comprender e interactuar con el fenómeno del movimiento, partiendo de la evolución de la práctica de modelación, es decir pretendemos que el estudiante por medio de las herramientas que construya, las modifique para modelar fenómenos más complejos.

### Fundamento teórico

Durante el desarrollo de nuestra disciplina, se han impulsado diferentes puntos de vista, cada vez más complejos, acerca de la construcción de los conocimientos por los actores sociales. El tránsito por propuestas donde se menospreciaba, a los actores de los procesos, o bien a lo epistemológico, y con ello borrando el peso de los aprendizajes referidos a ciertas construcciones histórico culturales, como en la matemática o la física (Arrieta, 2003).

Nuestra investigación se inscribe en la perspectiva teórica de la Socioepistemología e insertamos nuestro trabajo en la línea de investigación de las Prácticas sociales y la construcción social del

conocimiento, aceptando a la práctica de modelación como la base de nuestro diseño de aprendizaje, la cual es entendida como una práctica que combina el trabajo, la intervención en la naturaleza y la especulación matemática.

Tomaremos a la práctica social de modelación desde el punto de vista de Arrieta (2003, pp112), donde menciona...“*Aceptamos a la práctica social de modelación como una actividad con la intención social de comprender y transformar la naturaleza, la consideramos fuente que desarrolla procesos de matematización*”

Dentro de estos procesos identifica actividades claves para el desarrollo de la práctica de modelación como son:

- Crear herramientas específicas y formas particulares para describir los hechos
- Construir argumentos a través de conjetura y confirmaciones, basadas en la inducción como práctica.
- Desarrollar formas de predicción.
- Argumentar y validar versiones, de otros o de ellos mismos, utilizando múltiples herramientas.
- Utilizar conocimientos previos que puedan llevar a descubrir y/o explicar el nuevo conocimiento (Arrieta, 2003).

Así mismo, tomamos la Evolución de la práctica como base para la construcción de lo cúbico, considerándola como es expuesta en Méndez (2008) quien argumenta que la evolución de las prácticas se logra mediante la experiencia que se adquiere durante el ejercicio de la misma.

Por último creemos necesario dejar claro lo que se entenderá por movimiento y variación, desde la perspectiva de Cantoral & Molina (2006) nos dice que la noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación, la entenderemos como una *cuantificación del cambio*, tomando en cuenta como y cuanto cambia dicho sistema u objeto.

Observando lo anterior nosotros llamaremos movimiento a todo aquel cambio de posición con respecto al tiempo mientras que la variación, la entenderemos como una *cuantificación del cambio, la cuál puede ser obtenida por medio de las razones de cambio*.

### El escenario didáctico

Nuestra investigación es de naturaleza cualitativa, debido a que nos interesa la construcción social de herramientas por los estudiantes, para ello diseñamos un actividad que consta de cuatro fases donde el alumno va construyendo diferentes modelos (gráfico, numérico, analítico, algebraico) a través de la evolución de la práctica de modelación, pasamos de modelos simples a modelos más complejo, es decir, tomando lo lineal como base de la modelación cuadrática y cubica.

### Fases del diseño

El diseño contempla una serie de actividades, las cuales se dividen en 4 sesiones, que se presentan de la siguiente manera; en la primera fase se modifico el diseño presentado en Arrieta (2003), de comunicar el movimiento, con el objetivo de que el estudiante construya la gráfica distancia y tiempo como herramienta para comunicar el movimiento. Durante la segunda fase los alumnos construyen lo lineal a partir de la modelación del movimiento de un móvil, en la tercera fase se trabajará la modelación en un plano inclinado para construir lo cuadrático, tomando como experiencia la modelación lineal que se construyó en la fase anterior, por ultimo durante la cuarta fase se llegará a la construcción de lo cúbico utilizando las herramientas construidas durante las fases anteriores. Mostrado de esta forma la evolución de la práctica al pasar de modelos simples a modelos complejos.

### Algunos Resultados

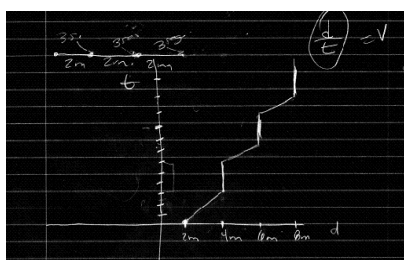
Expondremos algunos de los resultados obtenidos en *la exploración del diseño*, está se realizó con algunos estudiantes de la licenciatura en matemáticas, de la cual se tomarán elementos que servirán para el rediseño final de las actividades que se pondrán en escena con estudiantes de bachillerato y primer año de la licenciatura en matemática. En este reporte solo expondremos las dos primeras fases.

### Primera Fase; Comunicando el movimiento

Se organizaron tres equipos de tres estudiantes cada uno, se les pide que observen el movimiento del móvil y comuniquen el movimiento a sus compañeros a través de una gráfica, el movimiento a comunicar es:

- 1) Se coloca el profesor a dos metros de  $r$  (*punto de referencia*), se espera tres segundos, después se desplaza dos metros alejándose de  $r$  y permanece tres segundos; y, por último, se desplaza otros dos metros alejándose de  $r$  y permanece tres segundos.
- 2) Se coloca el profesor a seis metros de  $r$ , permanece dos segundos; avanza hacia  $r$  dos metros, permanece dos segundos; avanza hacia  $r$  medio metro permanece dos segundos; avanza un metro hacia el sensor, permanece dos segundos; y, por último, avanza dos metros más y permanece dos segundos.

#### El equipo 1

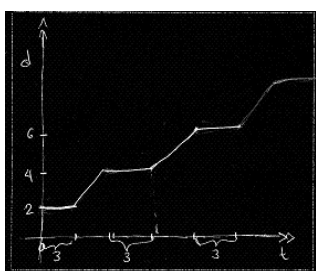


Este equipo graficó al contrario de cómo se enseña escolarmente, es decir tomo la variable dependiente en  $x$  y la variable independiente en  $y$ , sin embargo, en el transcurso de las preguntas se cuestionaron la necesidad de cambiar las variables para comunicar con más claridad el movimiento, las explicaciones que dan respecto a los cambios son que *en el tiempo de reposo es constante y que en los tiempos cuando avanza es lineal*.

Respecto a la segunda actividad ellos en base a la experiencia de la primera actividad ya sabían representar este movimiento en el plano cartesiano y asociar las respectivas variables de tiempo y distancia, sin embargo si les causo algo de conflicto el poder representar el movimiento cuando observaban que se regresaba hacia el punto de partida, sin embargo después de analizar y representar varias veces el recorrido, lograron representar el movimiento en el plano, a la pregunta que se hace respecto a como es el comportamiento respecto a los cambios del tiempo y la distancia ellos dicen que, *es ascendente hasta el punto en el que el movimiento se regresa, después es descendente, donde se estaciona es constante en ambos lados, cuando avanza se comporta como una gráfica lineal*.

### El equipo 2

Este equipo tuvo más dificultad para representar el recorrido, mencionan que les faltan datos, teniendo dificultad para asociar las variables, confundiendo trayectoria y movimiento, después de un rato y de la intervención de la profesora analizan el comportamiento de la distancia con

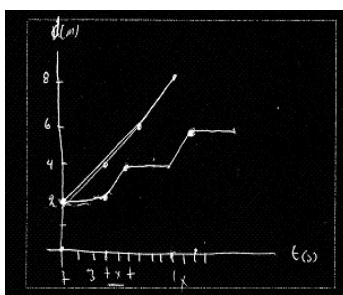


respecto al tiempo asociando estas variables a su gráfica, en sus respuesta de cómo es el comportamiento respecto a los cambios de distancia y tiempo ellos comentan que *se observa que conforme pasa el tiempo hay mayor distancia. Así como que el comportamiento de la gráfica se puede predecir debido a que el patrón que presenta continua de la misma forma.*

En la segunda actividad de la fase I, al igual que el equipo uno se basa en la experiencia de la actividad anterior para construir el modelo gráfico del movimiento representado, sin embargo también les causo algo de conflicto representar el movimiento de regreso hacia el punto de partida, representándolo como un decremento en el tiempo. Su respuesta a la pregunta respecto a los cambios es que *la gráfica está compuesta por dos curvas una constante y otra lineal. Además de que con la información que se obtuvo, no se puede predecir lo que pasará después.*

### El equipo 3

Este equipo no presento algún problema representaron con facilidad las variables y pudieron asociarlas, primero representaron la gráfica de forma lineal, sin embargo después de pedirles que argumentaran su respuesta y explicarán la representación modificaron su gráfica tratando de



encontrar el modelo analítico del movimiento realizado. Ellos dicen que el comportamiento respecto a los cambios es creciente, en cuanto a la segunda actividad tampoco se les dificulto representarla encontrando la ecuación que describía el movimiento, en cuanto a los cambios solo mencionan que *es creciente, constante y decreciente.*

## Segunda Fase; La variación en el movimiento uniforme

El objetivo principal es que los estudiantes caractericen la variación en los modelos lineales, esta caracterización les servirá como herramienta en las fases siguientes.

Se les explica brevemente como es el funcionamiento del sensor de movimiento y la calculadora Class-Pad 300 de Casio; la calculadora nos muestra la gráfica posición Vs tiempo se les enseña como guardar los datos en la calculadora con los que se trabajara en lo subsiguiente de la fase.

Las instrucciones para la primera grafica son:

Ubiquemos el sensor de movimiento en una mesa y con la ayuda de la calculadora y el sensor realizar los siguientes recorridos, guardando los datos en una tabla.

- 1) Ubiquemos un punto A, a medio metro del sensor, caminarás a paso constante, alejándote lentamente del sensor durante 8.0 segundos.

¿Podrías identificar las variables existentes en el experimento?

¿Cómo es el comportamiento de la gráfica cuando el móvil se aleja lentamente del sensor?

Podrías obtener el modelo algebraico de la gráfica que obtuviste ¿Cuál es?

Llena la siguiente tabla de la class-pad con los siguientes datos:

t		S		
(seg)	$t_j - t_i$	(metros)	$s_j - s_i$	$\frac{s_j - s_i}{t_j - t_i}$

¿Qué representa  $s_j - s_i$  en la tabla?

Gráfica en la calculadora los puntos correspondientes a  $t$  con los puntos de  $s_j - s_i$

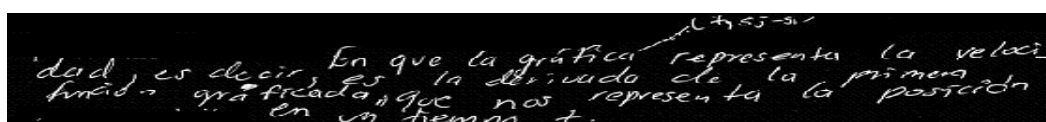
¿Cómo fue la gráfica que obtuviste?

¿Calcula la ecuación de dicha gráfica?

¿Qué relación encuentras entre la ecuación que encontraste anteriormente con la de los puntos  $t$  con los puntos  $s_j - s_i$ ?

### Equipo 1

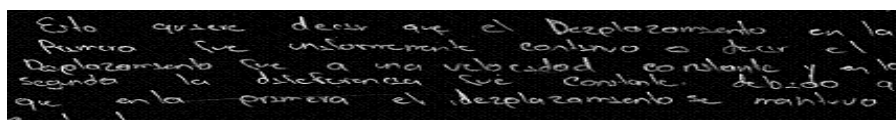
Con la ayuda del sensor de movimiento y la calculadora, pudieron bosquejar la gráfica que representaba dicho movimiento, identificaron las variables de tiempo y distancia, dicen que pueden dar una aproximación del modelo algebraico, además de que dicen que el comportamiento de la gráfica es lineal, rellenan la tabla, identifican que representa  $s_j - s_i$  nos dicen que son el incremento en el tiempo y hacen la grafica de  $s_j - s_i$  con  $t$  y nos dicen que *Esta representa la velocidad, o sea la derivada de la primera función graficada, que nos representa la posición en un tiempo  $t$ .*



En que la gráfica representa la velocidad, es decir, es la derivada de la primera función graficada que nos representa la posición en un tiempo  $t$ .

### Equipo 2

Este equipo también gráfica el movimiento con la ayuda del sensor y la calculadora, identificaron las variables de tiempo y distancia, nos dicen que es una recta creciente y que es continua, dan una aproximación del modelo algebraico, rellenan la tabla y también se dan cuenta de que después lo que se les pide es graficar a la derivada y dicen que *el desplazamiento en la primera fue uniforme continua es decir el desplazamiento fue a una velocidad constante y en la segunda la diferencia fue constante, debido a que en la primera el desplazamiento se mantuvo constante.*



Esto quiere decir que el desplazamiento en la primera fue uniformemente continuo o decir el desplazamiento fue a una velocidad constante y en la segunda la diferencia fue constante, debido a que en la primera el desplazamiento se mantuvo constante.

### Equipo 3

El equipo 3 gráficaron el movimiento y dicen que la pendiente es positiva, cuando ellos hacen la grafica de  $t$  con respecto de  $s_j - s_i$ , dicen que *la gráfica es constante, la diferencia esto se debe a que la velocidad es aproximadamente constante, pero el movimiento es creciente.*



La gráfica es constante, la diferencia se debe a que la velocidad es aproximadamente constante, pero el movimiento es creciente.



## Conclusiones

Algunas de las conclusiones de nuestra investigación, aún en proceso, es la problemática de interpretación del movimiento y la trayectoria de un móvil por estudiantes, lo cual les dificulta la interpretación y visualización gráfica de los fenómenos, al realizar con ellos una construcción de las gráficas posición vs tiempo a través de la comunicación del movimiento, nos permite llevar a cabo la construcción de lo lineal de forma más precisa y rápida, así mismo esta confusión en los estudiantes no permite tener claras las ideas de las relaciones existentes entre las variables dependiente e independiente en el plano cartesiano.

Los resultados preliminares obtenidos durante nuestra exploración nos permiten argumentar acerca de la evolución de la práctica de modelación como factor necesario en la intervención escolar, dándonos una articulación entre las herramientas matemáticas construidas escolarmente durante nuestra formación escolar.

## Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. y Molina J.M. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*. (pp. 739-744) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Catalán A. y Dolores C. (2000). El comportamiento variacional de la función lineal una experiencia didáctica con estudiantes del bachillerato. En R M. Farfán, C. E. Matías, D. Sánchez y A. Tavarez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 13*, (pp36-41). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores C. (1998). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores C. y Cuevas I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10(1)*, 69-96.

Méndez, M (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas*. Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.

Reséndiz E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(3), 435-458.

Rivera, M. (2005). *La algoritmia; una práctica de las comunidades de ingenieros en sistemas computacionales*. Tesis de Maestría no publicada, Facultad de Matemáticas, Unidad Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero.