LA DERIVADA COMO RAZÓN DE ACUMULACIÓN O AGOTAMIENTO

Teresa Parra Fuentes, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN México
tparra@cinvestav.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Superior

Resumen. *En este escrito presentamos un marco de referencia en el que se pone principal énfasis hacia la resignificación del conocimiento matemático rompiendo la centración en los conceptos. Tratando de dar cuenta de la relación entre la matemática con otros dominios científicos como lo es la Ingeniería ya que coincidimos con Cantoral y Farfán (2003) cuando mencionan que la matemática, en especial la del nivel superior, está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia en donde adquiere sentido y significación. Específicamente tratamos con el tema de La Derivada, para lograr tal resignificación seleccionamos el tema "Conservación de la Masa" de Mecánica de Fluidos en donde es usada de forma natural, y para favorecer tal resignificación usamos la idea de Lagrange sobre ésta. Estos elementos son tratados bajo la epistemología del Uso de las Gráficas, en donde la graficación es considerada una práctica social para generar conocimiento.*
Palabras clave: derivada, uso de las gráficas, mecánica de fluidos, resignificación

Problemática

La derivada trae grandes dificultades a los estudiantes, debido a los problemas que acarrean de los conceptos de función y de límite. Suelen escudarse en procedimientos algorítmicos para resolver cierto tipo de derivadas, pero al enfrentarse con problemas que implican la derivación no logran reconocerlo (Mirón, 2000). El discurso matemático escolar, respaldado por los libros de texto, privilegia a la derivada con el significado de pendiente de la recta tangente en un punto. La centración en tal significado soslaya su origen relacionado con el movimiento o con fenómenos variacionales además que de alguna manera obscurece su relación con otros dominios científicos.

Y es que el discurso matemático escolar se ha centrado en los conceptos, en algoritmos y fórmulas tratando de ofrecer a los estudiantes la exactitud y formalismo. Omitiendo las situaciones que permitieron que nazca el conocimiento y que sea manejado con cierta naturalidad, en un ambiente fuera de formalismos en donde el conocimiento lo obtiene el humano a través de su práctica y experiencia.

Tal centración lleva a concebir a la matemática sin sentido encerrada en sí misma, y no apreciar que se va desarrollando y resignificando al paso de la vivencia institucional. Es decir, que en el recorrido escolar la matemática va adquiriendo sentido y significación, en especial la matemática del nivel superior. Ya que esa matemática es aplicada y llevada a un escenario en donde es contextualizada, adquiriendo razón de ser. Este sentido y significado será en función de la actividad humana que desarrolle el dominio que se trate, por lo que al haber una variedad de dominios existe una variedad de resignificaciones.

Sin embargo estos desarrollos y diferentes resignificaciones no se hace evidente, ya que parecería que existe una ruptura entre la matemática y otros dominios, como por ejemplo el dominio de la ingeniería. Omitir estas relaciones obscurece a los estudiantes la funcionalidad de la matemática.

Con todo esto plantemos nuestra problemática de investigación que consiste en la ausencia de Marcos de Referencia en el discurso matemático escolar que permitan resignificar la derivada, esto es, ausencia de situaciones en los que el estudiante ponga en uso su conocimiento. En las que a través de su experiencia construya argumentos para dar sentido a sus procedimientos y de esta forma construir un conocimiento que no esté basado en la memorización sino en su práctica. Haciendo al estudiante participe de su conocimiento y no sólo un espectador, de tal forma que pueda construir una variedad de significados basados en su experiencia y que además den evidencia del desarrollo de la matemática en el sistema didáctico, específicamente nos enfocaremos en la matemática del nivel superior. Esto es, porque de alguna manera el discurso matemático escolar no posibilita que este conocimiento sea funcional, es decir, que tal conocimiento pueda ser incorporado al estudiante de manera orgánica a través de su experiencia, de su uso.

La investigación

Bajo esta reflexión es como surge el interés por realizar un marco de referencia para resignificar la derivada, lo cual nos condujo a investigar cómo vive la derivada en el dominio de la ingeniería, considerado como un dominio diferente a la matemática. Y así encontrar elementos que nos ayuden a la creación de tal marco. Específicamente nos centramos en el tema La Conservación de la Masa de la Mecánica de Fluidos, en donde es usada la derivada de forma funcional. En consecuencia se analizó que tal resignificación sería favorecida por la concepción de Lagrange sobre “lo que varía” alejado de límites e infinitésimos. Ambos elementos, la conservación de la masa y "la derivada" en el sentido de Lagrange son tratados bajo la epistemología del uso de las gráficas. En donde las graficación es considerada como una práctica social, y las gráficas se convierten en argumentos para justificar procedimientos.

La integración de estos elementos dio como resultado un marco de referencia que tiene como objetivo resignificar la derivada en la variación de la acumulación de un fluido en un volumen en el espacio.

El Uso de las gráficas

La graficación en la matemática escolar, por lo general, es considerada como la representación de expresiones analíticas o representación de datos. No es considerada la idea de que a través de ella se puede generar conocimiento, lo cual no es trivial, ya que se requiere de crear situaciones que tengan precisamente esa intención. Bajo esta idea es como surge la epistemología del *uso de las gráficas,* en donde al crear una intencionalidad para las gráficas nos lleva a que habrá una *función o funcionamiento* para ellas, que será realizada por medio de una *forma* expresada en la clase de tareas.

En esta dirección se han realizado varios trabajos, a la luz de la socioepistemología, que dan cuenta que la graficación puede ser considerada con tal estatus, este es, como una práctica social generadora de conocimiento matemático (Cordero, 2006).

En esos trabajos la centración no está en las definiciones o en los conceptos matemáticos sino en las gráficas, las cuales se convierten en argumentos para realizar procedimientos no propiamente algebraicos. Favoreciendo un conocimiento funcional.

Esta investigación trata de dar evidencia de ello, de que con el uso de las gráficas se construyen significados como la expresión misma de la generación del conocimiento. Y que los estudiantes construyen su propio conocimiento a través de sus prácticas. Estos procesos de construcción son, en algún sentido, opuestos a los procesos de adopción de definiciones y conceptos impuestos desde afuera, sin considerar las prácticas de los que intervinieron en su producción.

La Conservación de la Masa

El romper la centración en los conceptos obligó a poner la atención en otras componentes como los "usos del conocimiento", la cual lleva a reconocer que la matemática vive y se desarrolla en otros dominios de conocimiento en donde adquiere sentido y significación. Tal hipótesis nos llevó a entender cómo vive la derivada en un dominio diferente a la matemática como la ingeniería, en la cual nos enfocamos específicamente en el tema conservación de la masa de la mecánica de fluidos. Con la finalidad de encontrar elementos para construir un marco de referencia que permita su resignificación. En ese transcurrir nos dimos cuenta que la resignificación de la derivada en el tema de la conservación de la masa sería favorecida por las ideas de Lagrange sobre el comportamiento de las funciones.

La conservación de la masa, en la jerga de la mecánica de fluidos, suele expresarse por medio del siguiente diagrama:

$$0 = \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que sale del} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que entra al} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textit{rapidez de cambio} \\ \textit{de la masa dentro} \\ \textit{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

(Munson, Young y Okiishi, 1999)

Que puede ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que sale del} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que entra al} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \textit{rapidez de cambio} \\ \textit{de la masa dentro} \\ \textit{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

La derivada en el sentido de Lagrange

Por otro lado la derivada en el sentido de Lagrange es entendida como el coeficiente lineal de la serie de potencias:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots$$

(Cantoral, 2001)

Sin embargo para lo que nos interesa únicamente consideramos la serie hasta el segundo término esto es:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

De ambos obtenemos:

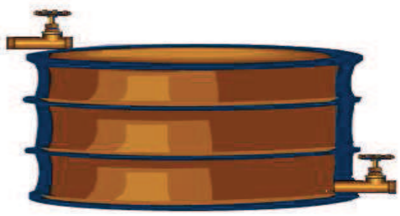
$$\begin{bmatrix} \text{gasto másico} \\ \text{que sale del} \\ \text{volumen de control} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{gasto másico} \\ \text{que entra al} \\ \text{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{rapidez de cambio} \\ \text{de la masa dentro} \\ \text{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

En donde la resignificación de la derivada sucede en una situación de variación de la acumulación de un fluido. En particular estamos interesados en el rol del uso de las gráficas cuando se establece la variación de la acumulación del fluido. Es decir, nos cuestionamos cuál es el funcionamiento de las gráficas para establecer el comportamiento de la acumulación de un fluido y cuál es la clase de tareas que conduce la forma de la gráfica en la "resta" entre el fluido de salida y entrada.

Con base a estas ideas planteamos una secuencia didáctica, que inicia presentando al estudiante un contenedor o volumen de control con una entrada y una salida, como se muestra a continuación:



A partir de esta idea, se proponen 5 situaciones:

La primera es una introducción para que el estudiante establezca la correspondencia entre las manipulaciones de las llaves con lo que sucede en el volumen de control presentándose a los estudiantes situaciones como: *Si la llave de entrada se encuentra más abierta que la llave de salida y se empieza a cerrar de tal forma que quede más cerrada que la de salida y nuevamente se vuelva a abrir hasta superar a la llave de salida.* Se le pide que grafique el registro de la cantidad de agua en el volumen de control. Siendo la relación: Manipulación $\longrightarrow$ gráfica.

La segunda tiene como objetivo que el estudiante reconozca la *acumulación* o *agotamiento* que se realiza en pequeños intervalos de tiempo, esto es, cuánto creció o decreció la cantidad de masa en el volumen de control de un instante a otro. Para lo cual necesita conocer dos estados: la cantidad de masa en el volumen de control en algún momento y un instante después, cuya diferencia dará la acumulación o agotamiento en ese instante. Observándose que al crecer la cantidad de fluido en el volumen de control entonces habrá una acumulación, por lo que la gráfica de las diferencias será positiva; y cuando decrece habrá un agotamiento por lo que la gráfica de las diferencias será negativa. Se les pide que realicen un bosquejo de estas cantidades con respecto a las gráficas que trazaron en la situación anterior.

En la tercera se presentan al estudiante gráficas como las que trazaron en la situación 2 que corresponden a diferencias, es decir, gráficas sobre la acumulación o agotamiento, que corresponden a la derivada. Teniendo como finalidad que los estudiantes confronten las gráficas de las diferencias con las manipulaciones de las llaves, esto es, cómo tendrían que ser éstas últimas para obtener las gráficas que se les dan. Entre las cuales están:

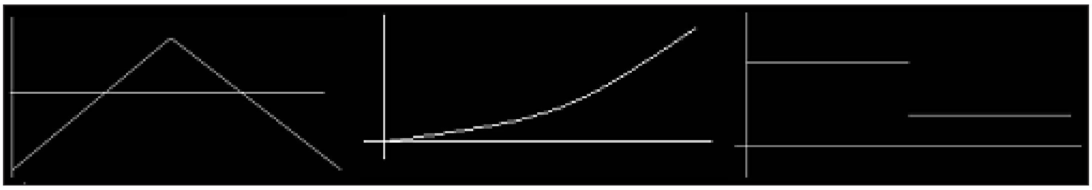


Figura I

De esta forma la relación de las manipulaciones de las llaves con la gráfica se dará en sentido contrario al del inicio, esto es: Gráfica $\longrightarrow$ Manipulaciones

En la cuarta se espera que el estudiante establezca la conservación de la masa de forma implícita, esto es, que establezca las relaciones entre los datos dados que estarán regidos por la misma conservación de la masa. Ya que se tiene que cumplir que la cantidad que sale menos la cantidad que entra sea igual a la cantidad acumulada en ese instante. Para ello se presentan al estudiante 3 columnas como las que se muestran en la figura II, en las que se dan 2 datos y él tiene que establecer el tercero, usando las gráficas como un medio argumentativo para tal fin.

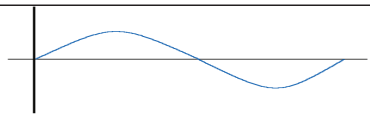
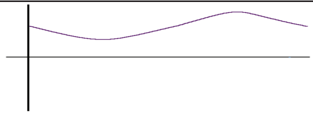
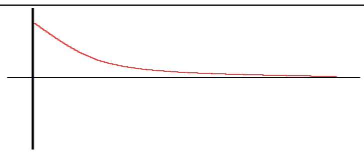
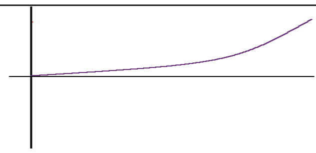
Flujo de entrada	Acumulación o agotamiento	Flujo de salida
		
		

Figura II

La última situación tiene como finalidad que el estudiante establezca la conservación de la masa a través de la expresión lineal de la serie de Taylor, esto es,

$f(x+h)=f(x)+(-f'(x)h)$. Es decir, que identifique una cantidad primitiva o flujo de entrada de la cual se van a derivar las demás. Para ello se le guía por medio de preguntas sobre gráficas que se le muestran sobre flujo de entrada, acumulación instantánea y flujo de salida con el fin de que establezca las diferentes relaciones que existen entre ellos.

Resultados

Esta secuencia didáctica ha sido aplicada a estudiantes de ingeniería, actualmente nos encontramos en la fase de análisis de los datos. Entre los resultados hallados principalmente destacan darle sentido a las gráficas de la acumulación o agotamiento, que corresponde a la derivada, con base a dos estados: la entrada y la salida de flujo. Que favorece los aspectos variacionales que han sido soslayadas por el discurso matemático escolar. Además, dan significado a los puntos máximos, mínimos, cero, a los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la derivada que se manifiesta en sus argumentos. Por ejemplo, en los puntos donde la acumulación es cero identifican que es cuando coinciden el flujo de entrada y salida; cuando hay un máximo es porque hay un cambio en las llaves, es decir, que la llave de entrada de estarse abriendo empieza a cerrarse pero sin superar a la llave de salida; y en el caso de un mínimo es porque la llave de salida de estarse abriendo se empieza a cerrar pero sin superar la llave de entrada.

Conclusiones

Queremos hacer notar que en el diseño de la situación se trabaja con la derivada sin hacer referencia a expresiones algebraicas, ni al concepto de función. Tratando que el estudiante desarrolle las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada y que es soslayado por el discurso matemático escolar. En un escenario en el cual puede construir argumentos y significados con base en su experiencia y en una situación usual, usando las gráficas como argumentos para realizar sus procedimientos.

Referencias bibliográficas

Cantoral R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1),* 27-40.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica 20 (1)*, 59-79.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en ua ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones f y f' en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas.* Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Munson, B.; Young, D; Okiishi, T. (1999) *Fundamentos de Mecánica de Fluidos.* México: Ed. Limusa y Wiley.