LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS. UNA EXPERIENCIA DOCENTE

Mariana Morales Vilorio
Universidad Autónoma de Santo Domingo
mmorales500@hotmail.com, mmorales64@uasd.edu.do
Campo de investigación: Pensamiento algebraico Nivel: Superior

Resumen. *Tradicionalmente, el aprendizaje de la factorización de polinomios ha sido uno de los tópicos más problemáticos para nuestros alumnos y alumnas, debido a la forma de "enseñanza", basada en reglas o pasos, según el caso de que se trate. Esta dificultad se presenta en los niveles medio y superior (pre-cálculo).En nuestra práctica docente y en los materiales impresos que hemos producido, hemos aplicado un enfoque diferente, a partir de los productos notables, los cuales se trabajan previamente mediante la técnica de taller. Se organizan las actividades de aprendizaje de tal forma que los alumnos y las alumnas descubren por sí mismos las propiedades, antes llamadas "reglas" y que eran dadas como un dogma que había que memorizar.*

Palabras clave: experimentación, aprendizaje cooperativo, aprendizaje significativo, comunicación efectiva.

Algunas reflexiones didácticas

El aprendizaje se produce en los que aprenden si el objeto de conocimiento tiene algún significado para ellos y si pueden relacionarlo con otros conocimientos previamente obtenidos. Es lo que llamamos el sujeto situado. El sujeto situado es el aprendiz ubicado en su realidad, en su medio, en un contexto, ya sea este físico, ambiental o cultural.

De esta forma se enseña al aprendiz a pensar y actuar sobre contenidos significativos y contextualizados, mediante procesos activos donde el sujeto cognitivo es aportante, no un simple receptor de conocimientos. Además, lo que aprende debe tener alguna aplicación, ya sea para educar el pensamiento, para agilizar los procesos posteriores de razonamientos, o para resolver algún problema o situación problemática o alguna otra función cognitiva.

"Los tres aspectos claves que deben favorecer el proceso instruccional serán:

a) El logro del aprendizaje significativo.

b) La memorización comprensiva de los contenidos escolares.

c) La funcionalidad de lo aprendido." (Díaz; Hernández, 1999, pág. 16)

Para el aprendizaje de la factorización de polinomios hemos organizado las actividades en forma de taller, de tal manera que los estudiantes tomen el control de ellas y desarrollen las estrategias que le permitan factorizar correctamente los polinomios, de acuerdo al grado de dificultad que corresponde a su nivel de estudios.

> *"…el pensamiento matemático se desarrolla entre los estudiantes en la medida en que ellos estén en condición de tomar el control de sus propias actividades matemáticas organizadas por su profesor."* (Cantoral; Farfán, 2000, pág. 56)

Aprendizaje cooperativo

Los estudiantes han aprovechado las ventajas del aprendizaje cooperativo, logrando que todos los miembros de cada grupo desarrollen las estrategias para la factorización de polinomios, a partir de los productos notables.

Según Frida Díaz y Gerardo Hernández, "*al realizar actividades académicas cooperativas, los individuos establecen metas que son benéficas para sí mismo y para los demás miembros del grupo, buscando así maximizar tanto su aprendizaje como el de los otros. El equipo trabaja junto hasta lograr que todos los miembros de grupo han estudiado y completado la actividad con éxito.*" (Díaz; Hernández, 1999, pág. 55)

Importancia de la comunicación en el aprendizaje de la factorización

La comunicación correcta es clave para aprender a factorizar polinomios y para cualquier otro tópico del campo del conocimiento matemático.

"*En el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, el lenguaje sí tiene un lugar privilegiado.*" (Mora y Wladimir, 2006, pág. 277).

Los estudiantes deben comprender correctamente los términos: factor, divisor, múltiplo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, monomio, polinomio, binomio, trinomio, cuadrado, raíz cuadrada, factores primos, polinomio irreducible, etc.

Además, deben saber interpretar los textos que leen o escuchan; deben comunicar correctamente los conceptos, las ideas, las expresiones algebraicas y las estrategias a utilizar en el trabajo matemático.

Es común entre los estudiantes confundirse al leer las expresiones algebraicas como:

"El cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2$ "y "la diferencia de cuadrados: a^2-b^2"

Confunden la factorización del trinomio cuadrado perfecto: "$x^2 - 2xy + y^2$" con la de la diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2$

Escribimos a continuación algunos ejemplos de los que trabajamos en el taller, organizados en grupos de tres (3) personas.

Actividad #1. Factorizando diferencias de cuadrados.

A) Desarrollen los productos siguientes, aplicando las propiedad del producto de la suma por la diferencia de dos cantidades: (a+b) (a-b).

a) $(x+9)(x-9) =$ ________________ b) $(6x-11)(6x+11) =$ __________

c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{5}\right) =$ __________ d) $(x+y)(x-y) =$ _____________

¿Qué tipo de polinomios han obtenido?

¿Qué relación existe entre los términos de los binomios obtenidos con los términos de los binomios factores?

B) Escribiendo de forma reflexiva estas igualdades, obtenemos otras igualdades equivalentes, las cuales deben completar en equipo.

e) $x^2 - 81 =$ ________________ f) $36x^2 - 121 =$ ______________

g) $\frac{x^2}{4} - \frac{9}{25} =$ ________________ h) $x^2 - y^2 =$ ________________

Cuando expresamos que: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, estamos factorizando (escribiendo en forma de factores) la diferencia de cuadrados: $x^2 - y^2$, ya que (x + y) y (x-y) son factores primos entre sí.

Como pueden ver x^2 es el cuadrado de x. Además, y^2 es el cuadrado de y

En el caso (f): $36x^2 - 121 = (6x + 11)(6x - 11)$, puedes descubrir que: $6x$ es la raíz cuadrada de $36x^2$ y que 11 es la raíz cuadrada de 121.

La descomposición factorial de la diferencia de cuadrados: $36x^2 - 121$ es igual al producto de los dos binomios lineales $(6x + 11)$ y $(6x - 11)$

Analicen los casos (e) y (g) de la misma forma y escriban sus conclusiones.

Discutan sus conclusiones entre sí, acerca de cómo se factoriza una diferencia de cuadrados. Escriban dichas conclusiones. Luego factoricen la diferencia de cuadrados dada: $4x^4 - 25$

Completen la siguiente propiedad:

Si a y b son dos expresiones cualesquiera, entonces, $a^2 - b^2 = (a + \quad)(\quad - b)$. (1)

La expresión: $x^2 - 5$, ¿se pude factorizar como una diferencia de cuadrados?

¿Cuál es el cuadrado de la $\sqrt{5}$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $(\sqrt{5})^2 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ ?

Efectivamente, $x^2 - 5 = (x + \sqrt{5})(x - \quad)$. Completen la factorización.

C) Factorizar las diferencias de cuadrados siguientes, aplicando la propiedad (1)

1) $16x^2 - 64$ 2) $\frac{1}{y^2} - 4$ 3) $1 - 9x^2$ 4) $x^2 - 7$

5) Escriban otras diferencias de cuadrados y factorícenlas.

***Actividad # 2 Factorizando trinomios cuadrados perfectos*.**

A. Desarrollen directamente los productos siguientes, aplicando las propiedades del cuadrado de un binomio: $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$.

a) $(x+y)^2 =$ _______________ b) $(x+5)^2 =$ _________________

c) $(x-y)^2 =$ _______________ d) $(3x-4)^2 =$ _______________

Los polinomios obtenidos en cada ejercicio son trinomios cuadrados perfectos (t.c.p), por ser el desarrollo del cuadrado de un binomio. Observen las relaciones entre los términos de los binomios y los de los trinomios.

B. Escribiendo de forma reflexiva cada igualdad, obtenemos otras igualdades equivalentes, los cuales deben completan ustedes en equipo.

e) $x^2 + 2xy + y^2 =$ _______________ f) $x^2 + 10x + 25 =$ _______________

g) $x^2 - 2xy + y^2 =$ _______________ h) $9x^2 - 24x + 16 =$ _____________

La expresión: $(x+y)^2$, que equivale al producto: $(x+y)(x+y)$, es la forma factorizada del trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2xy + y^2$. Igual sucede con $(x-y)^2$ o $(x-y)(x-y)$, que es la forma factorizada del t.c.p: $x^2 - 2xy + y^2$

Analicen las dos igualdades: (e) y (g):

e) $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$ y g) $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

Comparen los términos del t.c.p., $x^2 + 2xy + y^2$ con los del binomio: $x+y$.

Lo mismo hagan con el otro trinomio: $x^2 - 2y + y^2$ y el binomio $x - y$

¿En qué se diferencian los dos trinomios, $x^2 + 2xy + y^2$ y $x^2 - 2xy + y^2$?

¿En qué se diferencian las dos expresiones factorizadas, $(x+y)^2$ y $(x-y)^2$?

Hagan el mismo análisis con las igualdades (f) y (h), es decir, comparen los términos del t.c.p.: $\underline{x^2 + 10x + 25}$, con los del binomio: $x+5$ y los términos del t.c.p: $9x^2 - 24x + 16$, con los del binomio: $3x - 4$.

En grupo, hagan la factorización de los trinomios:

$x^2 + 16x + 64$ y $x^2 - 16x + 64$.

- Establezcan las características de los trinomios cuadrados perfectos.

Discutan y escriban sus conclusiones sobre cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Completen la siguiente propiedad.

Si a y b son dos expresiones cualesquiera, entonces, $a^2 + 2ab + b^2 = (\quad + \quad)^2$ y $a^2 - 2ab + b^2 = (\quad - \quad)^2$ (2)

C) Factoricen los trinomios dados, aplicando la propiedad (2)

1) $x^2 - 12x + 36$ 2) $x^2 + 14x + 49$ 3) $4x^2 + 20x + 25$

Escriban otros trinomios cuadrados perfectos y factorícenlos, si les parece oportuno.

Actividad #3 Factorizando trinomios cuadráticos de la forma: $x^2 + bx + c$

A. Apliquen la propiedad del producto de dos binomios lineales para desarrollar los productos dados:

a) $(x-3)(x-2) =$ __________ b) $(x+8)(x+6) =$ _________

c) $(x+7)(x-5) =$ _________

Los polinomios obtenidos son trinomios cuadráticos de la forma: $x^2 + bx + c$.

¿De acuerdo? Compárenlos.

B. Si escribimos las tres igualdades de forma reflexiva, obtenemos otras tres igualdades equivalentes, los cuales ustedes deben completar entre todos (as):

d) $x^2 - 5x + 6 =$______ e) $x^2 + 14x + 48 =$______ f) $x^2 + 2x - 35 =$______

La expresión: $(x-3)(x-2)$, es la forma factorizada del trinomio cuadrático: $x^2 - 5x + 6$.

Observen las relaciones que existen entre las constantes (- 3) y (- 2) y los coeficientes (- 5) y 6, del trinomio $x^2 - 5x + 6$.

Completen: $(-3) + (-2) = \underline{\quad ? \quad}$; $(-3)(-2) = \underline{\quad ? \quad}$

Analicen también la factorización del trinomio (e): $x^2 + 14x + 48 = (x+8)(x+6)$.

Describan las relaciones que existen entre los coeficientes del trinomio y los de los binomios factores.

Completen: 8+6=____?_____; (8).(6)=_____?______

….Hagan el mismo análisis en el caso de: $x^2 + 2x - 35 = (x+7)(x-5)$

- Discutan entre ustedes y escriban sus conclusiones acerca de:

1. ¿ Cómo se reconoce si un polinomio es un trinomio cuadrático de la forma: x^2+bx+c?
2. ¿Cómo se hace la descomposición factorial?

Factoricen entre todos (as) los trinomios: $x^2+2x+1 \quad y \quad x^2-2x+1$.

Completen la siguiente propiedad:

En general, si b, c, p y q son constantes reales, entonces, $x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$, donde: p.q=____? y p+q = __?__¡Completen! (3)

C. Factoricen los trinomios siguientes, aplicando la propiedad (3)

1) $x^2-x-6=$ 2) $x^2-9x+20=$ 3) $x^2+11x+10=$

Estos son sólo algunos ejemplos de cómo se puede organizar las actividades de aprendizaje en ambientes donde no existen medios tecnológicos como computador, pizarra electrónica, etc., sino solamente lo esencial en una aula de clase de universidades estatales con escasos recursos para equiparlas con las nuevas tecnologías que eficientizan la educación. Existen programas con los cuales se puede trabajar la factorización a través de un computador, los cuales utilizan la estrategia de que los estudiantes trabajen para encontrar las soluciones.

Conclusiones

En nuestra experiencia, hemos comprobado algunas hipótesis, tales como:

El alumno aprende mejor si relaciona los nuevos conocimientos con los que ya posee.

El aprendizaje debe ser una actividad significativa para el aprendiz.

El profesor o la profesora debe organizar las actividades de aprendizaje analizando el proceso de interacción entre el conocimiento nuevo y el que ya poseen los alumnos.

Cuando se parte de los saberes previos y se favorece la experimentación y el análisis para llegar a la conceptualización y a la generalización, el aprendiz "reconstruye" los conocimientos y se apropia de ellos, pasando entonces a la fase de la fijación, la aplicación y a la valoración de éstos.

Al relacionar la factorización de polinomios con las propiedades de los productos notables se produce ese enlace fenomenal de conocimientos que permiten un aprendizaje eficaz.

Referencias bibliográficas

Díaz, F., Hernández, G. (1999). *Estrategias Docentes para un aprendizaje significativo. Un enfoque constructivista.* México: Mc Graw Hill.

Cantoral, F., Cordero, F., Farfán, R. (2000). Desarrollo de Pensamiento Matemático. ITESM. Universidad Virtual. México: Trillas.

Mora, D.; Serrano G. (2006). Lenguaje, Comunicación y Significado en Educación Matemática. GIDEM—Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática. La Paz: Campo Iris.