UN ESTUDIO DIDÁCTICO DEL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN PARA INGENIERÍA EN EL CONTEXTO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Ernesto Bosquez, Javier Lezama, César Mora
Instituto Tecnológico de Toluca, México
Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Nacional.
ernestok1@hotmail.com, jlezamaipn@gmail.com, cem136@gmail.com
m
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Superior

Resumen. *En esta investigación, se presenta un rediseño del discurso escolar para el aprendizaje del teorema de convolución en algunas escuelas de ingeniería, en el contexto de la transformada de Laplace. Con la perspectiva de una aproximación socioepistemológica se propone dar un sentido y significación a la algoritmia del teorema de convolución que usualmente se practica en los cursos de ecuaciones diferenciales y que produce una desarticulación entre los objetos matemáticos involucrados. Nuestra propuesta permite articular a estos conocimientos matemático, es decir, la ecuación diferencial, la transformada de Laplace, teorema de convolución la solución de la misma.*
Palabras clave: socioepistemología, rediseño del discurso matemático escolar, algoritmia

Introducción

Lo que conocemos actualmente como enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería, puede describirse de la manera siguiente; se muestra el teorema de convolución y a continuación se da un ejemplo en donde se resalta el aspecto algorítmico, dejando en los estudiantes una desarticulación entre los objetos matemáticos involucrados, es decir, sin mostrar un sentido y significación en su relación con la ecuación diferencial, la transformada de Laplace y la convolución misma, por ejemplo, dentro del aula se le indica al estudiante que resuelva el problema siguiente.

Usando la transformada de Laplace y el teorema de convolución, resolver la ecuación diferencial, $y'' + y = \cos t$ *con las condiciones iniciales* $y(0) = y'(0) = 0$.

La manera típica de resolver esto (Proceso mencionado), es como sigue; se aplica este operador en ambos miembros de la ecuación diferencial dada, es decir:

$$s^2 \mathcal{L}\left[y(t)\right] - s\,y'(0) - y(0) + \mathcal{L}\left[y(t)\right] = \mathcal{L}\left[\cos t\right], \qquad \text{(I.1)}$$

simplificando se llega a:

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right]=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}, \tag{I.2}$$

aplicando el teorema de convolución se obtiene que:

$$y(t)=(sen\,t)*(cos\,t), \tag{I.3}$$

y por tanto la solución corresponde a:

$$y(t)=\frac{1}{2}t\,sen\,t\,. \tag{I.4}$$

En este ejemplo, el docente reconoce comúnmente lo complejo que es para el estudiante entender o bien asimilar dicho conocimiento, ya que el estudiante no encuentra una articulación entre la EDO, el teorema de convolución y la solución de la misma, es decir el estudiante opera de manera algorítmica sin darle un sentido a los objetos matemáticos mencionados.

Este proceso puede representarse de la manera siguiente

$$\boxed{\text{EDO}} \longrightarrow \boxed{\text{T L}} \longrightarrow \boxed{\text{T C}} \longrightarrow \boxed{\text{SOL.}}$$

Figura No. 1 Proceso de enseñanza del TC dentro del salón de clase

El cuadro negro queremos reflejar la desarticulación que muestra el estudiante ante los demás objetos matemáticos involucrados y en donde queda sólo la algoritmia sin que sea posible un papel articulador del teorema con los demás elementos del problema. A partir de esto, establecemos dos vertientes importantes para nuestra investigación; el sentido del teorema y su génesis así el sentido de la algoritmia asociada al mismo, de tal manera que esta última relacione y articule los objetos matemáticos involucrados. Lo anterior permite plantearnos los cuestionamientos siguientes.

¿Qué aspectos del Teorema de Convolución y su génesis, proveen elementos para la construcción escolar de un posible significado en el contexto de las ecuaciones diferenciales?

¿Que sentido o significado es posible dar a esta construcción y la práctica algorítmica escolar asociada?

En nuestra investigación, el enfoque socioepistemológico (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006) nos permitió proponer un rediseño del discurso de la matemática escolar del TC, en dónde se muestra en la vertiente correspondiente a la génesis de este teorema, a través de la dimensión epistemológica; se muestra la complejidad de construir significados del teorema exclusivamente en el contexto matemático en el caso de los estudiantes de ingeniería, hecho que nos orilló a la búsqueda de prácticas sociales (predicción, modelación, etc.,) que permitan construir significados a través de la articulación de mayor número de elementos matemáticos, tales como, la ecuación diferencial asociada a un circuito resistencia inductancia (RC), a la función involucrada en la EDO, la transformada de Laplace, el TC y la solución de la misma.

Desarrollo de la investigación

La enseñanza actual de las EDO, básicamente se realiza en tres escenarios *Algorítmico Algebraico, Geométrico y Numérico* (Artigue y Douady 1995, Hernández 1996). Enfatizándose más el escenario algorítmico algebraico, el cuál puede describirse como el uso de definiciones, teoremas y el cálculo algorítmico de los diferentes conocimientos matemáticos. Lo anterior fundamenta, en parte, nuestro interés por realizar esta investigación centrada en un estudio didáctico de los problemas de enseñanza y aprendizaje del teorema de convolución, en algunas escuelas de ingeniería, en el contexto de la transformada de Laplace. Otro aspecto que complementa la justificación en nuestra investigación corresponde a lo que se presenta en el discurso escolar matemático con respecto a la enseñanza de las EDO, es decir, al resolver una EDO lineal de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes con la transformada de Laplace se tiene que de:

$$a\,y'' + b\,y' + cy = f(t); \quad y(0) = y_0,\, y'(0) = y_1, \tag{1}$$

Se llega a

$$\phi_p = f * g = \mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}\left(f(t)\right)\mathscr{L}\left(g(t)\right)\right]. \tag{2}$$

Así, la solución de la EDO propuesta sería de la forma:

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_p(t), \quad (3)$$

donde se muestra que se usa necesariamente el teorema de convolución.

Aspectos Cognitivos: En esta dimensión (a través de encuestas y entrevistas) obtuvimos evidencias de una clara carencia de comprensión del teorema y entendiéndose exclusivamente como una regla para operar en la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

Aspectos Didácticos: Aquí se muestra que en la práctica docente, la enseñanza del *TC*, corresponde a un discurso ligado básicamente al programa oficial y a los textos usuales de ecuaciones diferenciales que se emplean en las escuelas de ingeniería. Con esta perspectiva nuestra investigación muestra que no hay propuesta didáctica con intención de articular los conocimientos involucrados en la enseñanza del TC.

Aspecto Epistemológico: En esta dimensión nuestra investigación reporta que el conocimiento erudito correspondiente a la génesis del TC fue trabajada por Mellin (1896) cuyo enfoque está dentro de un contexto completamente matemático, esto nos permitió redirigir nuestra atención a darle al TC un sentido y significación a partir su algoritmia. El estudio del trabajo de Mellin nos permite ver que su integral de (convolución) al ser la solución de la EDO, nos permite recuperar ideas que aprovecharemos como elemento articulador en la práctica algorítmica en la solución de la EDO (Bell, 2003).

Aspecto Sociocultural: En este aspecto reportamos que bajo algunas prácticas sociales tales como la predicción y modelación se puedo relacionar los objetos matemáticos involucrados en la enseñanza del TC. Para esto se utilizó un circuito eléctrico RL (ver figura No1).

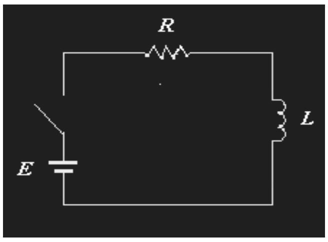

Figura No2. Representación gráfica de un circuito eléctrico RL.

En dónde la práctica social de modelación, permitió relacionar al circuito RL con la siguiente EDO.

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E(t) \tag{4}$$

Y esta a su vez con la transformada de Laplace, en la forma siguiente.

$$\begin{gathered} LsF(s)-i(o)+RF(s)=\mathscr{L}\left[E(t)\right] \\ F(s)=\frac{\mathscr{L}\left[E(t)\right]}{Ls+R} \quad , \end{gathered} \tag{5}$$

Y de aquí su relación con el TC y éste con la solución de la EDO propuesta.

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}\left[E(t)\right]\cdot\frac{1}{Ls+R}\right]=\frac{1}{L}E\left(t\right)*e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{6}$$

Es en este escenario donde producimos rediseño en el discurso de la matemática escolar haciendo posible que los elementos matemáticos involucrados en la enseñanza del TC sean articulados a través de lo que denominamos prácticas sociales. Estos cuatro aspectos permiten *plantear el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizandolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión"* (*Cantora, et al,* 2006).

La metodología que guía este trabajo es la que corresponde a la Ingeniería Didáctica (Artigue y Douady 1995), cuya caracterización corresponde a:1.- Es una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del Ingeniero.2.- Es una metodología de investigación dentro del campo de la Matemática Educativa. 3.- Sus componentes corresponden a tres fases las cuales se caracterizan en la forma siguiente.

En la Primera Fase: La didáctica se refiere a lo relacionado con el profesor. La Epistemológica está relacionada con el contenido matemático, su origen y desarrollo. La Cognitiva se relaciona con los alumnos, sus habilidades, etc. La Segunda Fase: Se enfoca a la elaboración del modelo que se pretende aplicar en la enseñanza, es decir, se dedica a la determinación del tratamiento del contenido y elección de los medios que se han de incorporar, para el diseño del modelo de enseñanza. Finalmente la Tercera Fase: Es necesario dterminar las variables a controlar, así como el tipo de muestra a tomar. En el análisis de resultados se contratarán el análisis *a priori* con el análisis *a posteriori.*

A manera de ejemplo mostramos algunos aspectos aislados del trabajo de investigación. Se aplicaron encuestas a cinco docentes y siete estudiantes, los primeros profesores que usualmente imparten en las distintas carreras de ingeniería, el curso de EDO, y los segundos estudiantes de tales profesores.

1.- El docente se basa en los conocimientos contenidos en los textos típicos, para nuestro caso, el más común es el Zill (1997).

2.- La mayor parte no se detiene en la búsqueda de un significado *TC, sólo se opera con él.*

3.- La práctica de aprendizaje se reduce al un escenario algorítmico algebraico.

4.- Se considera que la enseñanza del *TC* es bastante abstracta.

5.- Hay un convencimiento de que los estudiantes buscan sólo manejar la aplicación de fórmulas para resolver EDO.

Lo anterior nos permite afirmar que la enseñanza del *TC* en algunas escuelas de ingeniería corresponde a una práctica matemática escolar típica, omitiendo posible articulación con los elementos matemáticos involucrados en la solución de las ecuaciones Diferenciales.

En relación con los estudiantes podemos decir

1.- El estudiante presenta dificultades para enunciar o explicar el *TC*.

2.- No puede establecer relación alguna del TC con otros elementos matemáticos asociados a las ecuaciones diferenciales.

3.- Considera que la enseñanza del *TC* sin sentido, sólo pragmática.

4.- Los ejemplos que dan son en la resolución de algunas EDO lineales con coeficientes constantes.

5.- Manifiestan que se les debe proveer de un significado del *TC*.

6.- El *TC* se lo enseñan de manera idéntica al contenido del texto escolar, Zill; enunciado del teorema, definición y un ejemplo.

Lo anterior evidencia el proceso de aprendizaje del TC desarticulado de los demás conocimientos involucrados en las ecuaciones diferenciales.

La conjunción de las exploraciones en las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social nos han proporcionado elementos para elaborar una *situación problema* diseñada en un contexto electrónico que lleve a una ecuación diferencial como modelo de una situación electrónica (un circuito) que permita a su vez poner en escena prácticas referidas así como las herramientas pertinentes. Para nuestro caso empleamos el software Or Cad Release 9, que permitan construir un sentido y significado de la algoritmia del *TC.*, así como el trabajo de Gardner (1942) Esta práctica escolar se divide en tres partes:

La primera el estudiante interpretará un significado de la EDO que modela un circuito *RL*. La segunda el estudiante interpretará un significado analítico del *TC*. en un circuito *RL*. La tercera parte el estudiante interpretará un significado geométrico del *TC*, usando un circuito eléctrico *RL.*

Conclusiones (parciales)

1.- Nuestra investigación explora la posibilidad de proveer de sentido y significado a su algoritmia*,* que permita al estudiante vincular a los conocimientos matemáticos: EDO, TC y solución de la misma, hecho contrario a una enseñanza típica de una matemática escolar..

2.- La postura de algunos autores es que consideran que la matemática sólo es una herramienta para la ingeniería (Zill 2007), en nuestro trabajo de investigación se amplía este hecho. Por ejemplo, para fundamentar lo anterior considere los circuitos *RL* de la figura C.1.

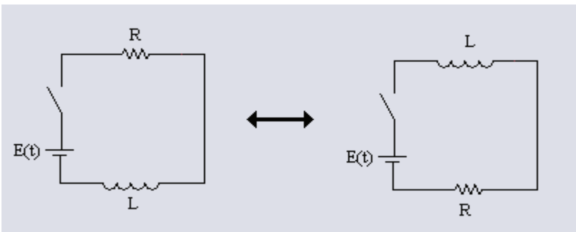

Figura C1. Circuitos RL dónde permutan el orden de sus componentes eléctricos.

¿Qué diferencia hay al resolver el circuito de la figura C.1 y C.2? Quizá para alguien esto no tenga sentido alguno, sin embargo este cuestionamiento conduce a reflexionar sobre la conmutatividad de la suma por un lado y por otro de la conmutatividad de la operación de convolución. De lo anterior puede inferirse que:

$$i(t) = \frac{E}{L}\left(1 * e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{L}\left(e^{-\frac{R}{L}t} * 1\right). \tag{C1}$$

De aquí se deduce:

$$f * g \quad = \quad g * f. \tag{C2}$$

Es decir, que a partir de una problemática que surge dentro de una práctica escolar, ésta nos permite, bajo las restricciones que por naturaleza deben involucrarse en la misma, a descubrir proposiciones dentro de la ciencia matemática de tal manera que éstas aseveraciones puedan avanzar a la misma, una vez que sean demostradas con el estricto rigor que una matemática situada para una necesidad específica exige. Esto es algo que nuestra investigación busca responder.

Referencias bibliográficas

Artigue M., Douady R (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la Investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bell, E. (2003). *The Development of Mathematics*. USA. Mc Graw-Hill.

Cantoral R., Farfán, Lezama J., y Martinez G. (2006). Socioepistemología y Representación, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa Núm. Especial*, 82-102.

Gardner M. (1942). *Transients in Linear Systems*, New Jersey: Jhon Wiley & Sons.

Hernández A. (1996). *Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numéricos, Algebraico y Gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias.*, Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Zill, D. (2007). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Mc Graw Hill.