

UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL FENÓMENO SISTEMA MASA-RESORTE MEDIANTE CALCULADORA GRAFICADORA

Maximiliano de Las Fuentes Lara, José Luis Arcos Vega, Álvaro Encinas Bringas, Ruth E. Rivera Castellón
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California México
maxito6782@hotmail.com, maximilianofuentes@uabc.mx
Campo de investigación: Tecnología avanzada Nivel: Superior

Resumen. *Se presenta un reporte de avance de un estudio explorativo y comparativo, aplicado con dos formas de estructurar el proceso de enseñanza de las matemáticas, particularmente sobre el concepto sistema masa-resorte en un programa de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California: a través de un esquema tradicional y mediante el diseño e implementación de una estrategia didáctica que incorpora la calculadora graficadora. Dicha estrategia es diseñada e implementada a partir de las teorías cognitivas (Duval, 1999) y (Hitt, 1991, 2003) y los avances logrados en el campo tecnológico (Kutzler, 2003), (Demana y Waits, 1998) y (Laborde, 2003) y su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.*

Palabras clave: calculadora, resorte, ecuaciones diferenciales

Las actividades en ingeniería de diseño, proyecto e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso físico, químico o fenómeno de que se trate, sino también de una aprehensión conceptual del objeto matemático en cuestión con la cual sea posible además de operar o trabajar en las distintas representaciones, facultar el estudio y tratamiento de aspectos especializados en nuevas situaciones.

En la formación del ingeniero alrededor del 20% de la carga curricular son cursos del área de matemáticas, álgebra lineal, matemáticas I, II, y III, ecuaciones diferenciales, entre otras asignaturas más. Las ecuaciones diferenciales y el estudio y aprendizaje de las mismas nos permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos, son ejemplos comunes de ello. Uno de los tópicos a estudiar durante el curso de ecuaciones diferenciales, es el denominado sistema masa-resorte.

El sistema mencionado tiene diversas implicaciones prácticas y profesionales, los sistemas de amortiguamiento de vehículos de transporte cotidiano y de carga, como tractocamiones, autobuses y aviones, presentan de manera inherente el sistema citado, los análisis sísmicos para

estructuras habitacionales, médicas, de negocios, recreación o de otra índole son modelados a través de los sistemas masa-resorte, la fabricación de productos por medio de robots o maquinaria pesada requiere tanto para su estabilidad como para su producción misma el análisis y diseño de piezas, uniones, brazos o soportes involucrando el sistema mencionado, la aparición del fenómeno que nos ocupa es pues múltiple en las áreas de ingeniería, por ello la importancia de sus estudio teórico y comprensión de parte de los estudiantes.

El presente proyecto propone incidir favorablemente en la eficiencia de los conocimientos de los estudiantes, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica de enseñanza que incorpora la calculadora como medio de producción de significados a partir de la vinculación dinámica de registros de representación (algebraico, tabular, grafico y verbal) del fenómeno denominado sistema masa-resorte.

Dicha estrategia es diseñada a partir de las teorías cognitivas (Duval, 1999) y (Hitt, 1991, 2003) toda vez que en las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia se enfatiza en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro, además de promover el equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico) para no privilegiar en particular alguno de ellos; los avances logrados en el campo tecnológico (Kutzler, 2003), (Demana y Waits, 1998) rescatando dos aspectos de la enseñanza de las matemáticas, trivialización y visualización, calificados como fundamentales en los referentes teóricos citados, la trivialización en el sentido de no ser obstáculo (por la presencia y uso de la calculadora) en la complejidad algebraica de las ecuaciones diferenciales involucradas durante el proceso de modelización y resolución del fenómeno en cuestión, y la visualización en el sentido de ilustrar el objeto matemático desde sus diferentes representaciones, esta última consideración o estilo de enseñanza se le reconoce como “el poder de la visualización”. Y finalmente, (Laborde, 2003) por su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, específicamente por promover en la estrategia didáctica la construcción de relaciones entre las distintas representaciones, así como de la posibilidad de conexión entre los registros, además de privilegiar los cálculos rápidos mediante el sistema de cómputo algebraico integrado a la calculadora e inherente a la propia estrategia didáctica.

Utilizando la capacidad para programar de la calculadora, se ha diseñado un ambiente físico (virtual)-gráfico para los distintos movimientos amortiguado y no amortiguado, que permite la

interacción entre el estudiante y el objeto matemático en cuestión. Bajo la manipulación del programa por parte del estudiante es factible observar el movimiento físico asociado al comportamiento gráfico, e interactuar a su vez con las actividades de aprendizaje diseñadas para tal efecto, de tal suerte que el estudiante este en mejor posibilidad de ir vinculando tanto los parámetros (rigidez, factor de amortiguamiento, condiciones iniciales de posición y velocidad) de las ecuaciones diferenciales y el sistema masa resorte, como las características de posición del contrapeso, velocidad y dirección del mismo.

En cada tipo de movimiento (libre no amortiguado, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado), se va vinculando el efecto físico y geométrico de los coeficientes y parámetros incorporados en las ecuaciones, así como también de la posición, velocidad y dirección. Se busca en este ambiente programado junto con las actividades de aprendizaje diseñadas, asociar en uno y otro sentido el efecto físico y geométrico de los parámetros y condiciones incorporados en las ecuaciones diferenciales aplicadas a los diferentes tipos de movimiento del sistema masa resorte, (ver figuras 1 y 2) y la posibilidad de transitar entre los distintos contextos, algebraico, gráfico, físico y tabular.

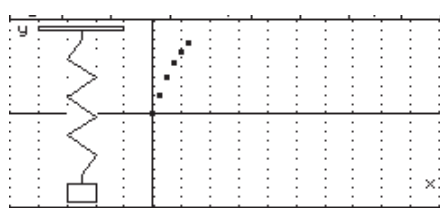


Fig. 1 El contrapeso se dirige hacia abajo

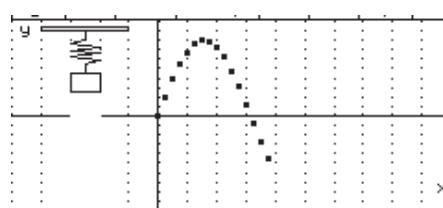


Fig. 2 El contrapeso se dirige hacia arriba

La experimentación se inicia con la necesidad por parte de los estudiantes de utilizar el programa de la calculadora graficadora como apoyo para responder algunos de los cuestionamientos de las actividades de aprendizaje, esto es, de manera paralela van ejecutando el programa y les es factible concluir de manera preliminar situaciones de conflicto. Ejemplos de ello son: a) La determinación de la relación entre el signo de la pendiente de la recta tangente en un instante y la dirección del contrapeso en ese momento, b) La ubicación gráfica del momento en el que el contrapeso pasa por segunda vez por la posición de equilibrio y se dirige hacia arriba. c) El comportamiento gráfico de un contrapeso que describe un movimiento críticamente amortiguado

(ver figura 3), d) El comportamiento del contrapeso conforme transcurre el tiempo en un sistema cuyo movimiento es subamortiguado (ver figura 4), entre otros.

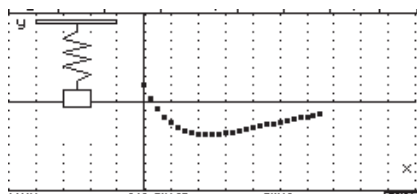


Fig. 3 Movimiento críticamente amortiguado

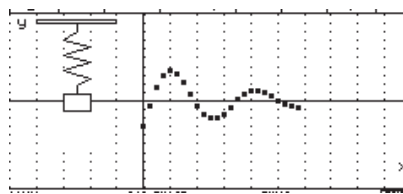


Fig. 4 Movimiento subamortiguado

Otra parte importante de la experimentación es la institucionalización, en donde se pone de manifiesto la veracidad o no de las conclusiones vertidas por los estudiantes, además de la declaración de conceptos y modelos, y la confirmación de conjeturas de los estudiantes a partir de sus observaciones y la interacción con el ambiente generado tanto por el programa y su ejecución como por el desarrollo de la estrategia didáctica.

Para realizar la experimentación, los estudiantes se organizaron en grupos formados por tres integrantes; haciéndoles entrega a cada uno de ellos una calculadora con el programa respectivo. Previamente se les capacitó en el uso básico de la máquina (edición de ecuaciones, graficación de funciones, ventanas de graficación, determinación de críticos relativos y raíces reales), ya que algunos de ellos no habían tenido contacto con la graficadora voyage 200. Se les planteó de manera introductoria el tema a tratar y posteriormente se les capacitó en cuanto a la forma de ejecutar el programa, Se entregó a cada equipo las actividades de aprendizaje y las instrucciones a seguir para el desarrollo de las actividades fueron dadas verbalmente. También se indicó que las respuestas que fueran anotadas no las borrarán, aunque después consideraran que estas estuvieran equivocadas. Posteriormente, se discuten las propuestas a nivel grupal y el profesor institucionaliza el conocimiento adquirido.

Respecto de la estrategia didáctica, ésta se conforma por un total de 7 actividades, cada una de ellas para abordar los diferentes tipos de movimiento del sistema masa-resorte y promover la actividad del estudiante en términos de los diferentes registros de representación. La realización de las actividades es apoyada con el programa de la calculadora, generando un ambiente visual del movimiento del sistema asociado al comportamiento geométrico.

Para llevar a cabo la experimentación, la cual fue realizada en 6 días durante una hora diaria, se contó con la participación de un grupo con 37 estudiantes de la clase de ecuaciones diferenciales de ingeniería en el año 2006. Este a su vez fue subdividido en dos, uno de ellos con 17 alumnos, el cual se constituyó como el grupo piloto, en el cual se pone a prueba la estrategia didáctica diseñada y el programa de calculadora de apoyo a las actividades de aprendizaje, este grupo fue asistido por un profesor investigador, el otro subgrupo, dirigido por el docente titular del curso e integrado por 20 alumnos, se constituyó como el grupo de control, quien recibiría la instrucción del tema en cuestión de manera tradicional. Con el objeto de tener evidencia del desempeño de los estudiantes y observar si el diseño e implementación de la estrategia didáctica mediada por la calculadora causa resultados favorables y significativos, se aplicó la prueba al finalizar la experimentación, los resultados y evidencias se comentan en los siguientes apartados.

A Continuación presentamos algunas de las observaciones detectadas durante el proceso de la experimentación:

- a) La mitad del grupo tuvo conflicto con la manipulación de unidades, mezclando en sus cálculos por ejemplo, pies con pulgadas.
- b) La determinación de extremos relativos, en algunos casos, se basaba primero en la obtención de la derivada y posteriormente en la resolución $x'(t) = 0$ sin utilizar la calculadora simbólica o gráfica, no obstante la previa capacitación para la obtención de críticos de manera directa en el ambiente gráfico de la calculadora.
- c) Extrañeza general por la convención de los parámetros (posición y velocidad), en el sentido del comportamiento gráfico y la posición y velocidad del contrapeso.
- d) En general los estudiantes pudieron describir físicamente el movimiento para cada uno de los casos con amortiguamiento y asociarlo al comportamiento gráfico.

La prueba fue diseñada en conjunto tanto por el docente titular como por el investigador, se incluyeron 14 preguntas tanto de opción múltiple como de respuesta breve, con la misma ponderación cada una, lo anterior con la finalidad de medir la eficiencia de los conocimientos logrados por los estudiantes en una escala de 0 a 100, tanto para el caso del grupo piloto como del grupo de control. Cabe señalar que en la aplicación de la prueba no se permitió el uso de libros,

apuntes, ni calculadora. De la aplicación y revisión del mismo se visualizan aspectos significativos, algunos de ellos se presentan a continuación.

Una diferencia sustancial tanto en la media de calificación obtenida, como en el porcentaje de acreditación. Ver tabla No. L

GRUPO	NO. DE ALUMNOS	MEDIA	DESVIACIÓN ESTÁNDAR	CALIFICACIÓN MÍNIMA	CALIFICACIÓN MÁXIMA	ACREDITADOS	% ACREDITADOS
CONTROL	20	41	22	14	93	4	20
PILOTO	17	55	23	7	100	8	47
TOTAL	37	47	23	7	100	12	32

Tabla No. I Comparativo estadístico de los resultados de la prueba.

Es de notarse la proporción de respuestas correctas (ver tabla No. II) del grupo piloto para los reactivos 4 y 5 por ejemplo, (ver anexo No. 1) en contraste con el grupo de control, el trabajo realizado con las situaciones de aprendizaje apoyado con el ambiente generado por el programa de la calculadora permitieron que el estudiante interpretará adecuadamente la dirección del contrapeso asociado a la posición de equilibrio o de referencia. En otras palabras, el ambiente generado por el programa de la calculadora en conjunto con la estrategia didáctica favorece que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico.

REACTIVO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
GRUPO DE CONTROL	0.55	0.80	0.40	0.35	0.25	0.20	0.55	0.50	0.35	0.50	0.25	0.60	0.35	0.10
GRUPO PILOTO	0.71	0.59	0.29	0.71	0.76	0.76	0.47	0.59	0.24	0.76	0.41	0.35	0.59	0.41

Tabla No. II Comparativo de proporciones de respuestas correctas del test aplicado

Conclusiones

Esta experiencia didáctica, permitió observar en todos los equipos en primera instancia un gran entusiasmo y apropiamiento del problema planteado.

La experiencia puede considerarse como exitosa en varios aspectos:

- Logra que los estudiantes se apropien intelectualmente del problema.

- Se consigue que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico. Además logran describir tanto física como geoméricamente los diferentes tipos de movimiento armónico y amortiguado.
- Los estudiantes asocian adecuadamente el gráfico de la ecuación de movimiento a partir de la ecuación diferencial que modela el sistema, y viceversa.

Además se identifican algunas situaciones que se considera fueron motivo para que los estudiantes no obtuvieran aún mejores resultados, a saber:

- El manejo insuficiente de las condiciones iniciales de manera formal.
- El énfasis en el proceso de resolución de las distintas ecuaciones diferenciales que modelan los movimientos del sistema masa-resorte.
- El poco tiempo (así considerado después de los resultados obtenidos) dedicado a la experimentación son ejemplo de ello.

A la vez se detectaron en cuanto a la estrategia didáctica, como necesario reforzar la parte correspondiente al tránsito del contexto numérico al físico, así como también del contexto analítico al físico, lo anterior es evidenciado en la prueba por el grupo piloto, en el reactivo 9 (ver anexo no. 1), pues la proporción es desfavorable para el grupo experimental.

El balance general de esta primera aproximación motiva a profundizar en la investigación y establecer las acciones inmediatas siguientes:

Rediseñar la estrategia didáctica de acuerdo a PISA (2003), mediante las competencias siguientes: modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, ya que en conjunto describen los procesos para el dominio del fenómeno sistema masa-resorte aunado a las ecuaciones diferenciales asociadas.

Diseñar y aplicar a los grupos piloto y de control un instrumento de medición diagnóstica (preprueba), con el objeto de establecer las condiciones de los conocimientos de los estudiantes en cuanto a las competencias (modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos) logradas hasta el momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte.

Llevar a cabo un análisis estadístico exhaustivo que permita visualizar la eficiencia relativa que logran los estudiantes en particular para cada una de las competencias, así como también en cada uno de los registros de representación y su impacto directo hacia las competencias matemáticas.

Referencias bibliográficas

Demana, F. y Waits, B. (1998). *Panorama de la Tecnología en la Educación*. Extraído el 12 de Marzo de 2007 desde <http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/reformbacklash.pdf>

Demana, F. y Waits, B. (1998). *El Rol de la Calculadora Graficadora en la Reforma de las Matemáticas*. Extraído el 12 de Marzo de 2007 desde <http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/roleofgraphcalc.pdf>

Duval, R. (1999). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Extraído el 12 de Marzo de 2007 desde <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>

Hitt, E. F. (1991). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática* 7, 63-75.

Hitt, E. F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes de tecnología. *Boletín de la Asociación Venezolana* 10(2), 213-224.

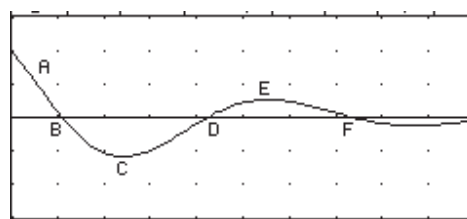
Kutzler, B. (2003). La calculadora algebraica como herramienta pedagógica para enseñar matemáticas. En A. Del Castillo, L. Dórame, J. Jiménez & E Hugues, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 9-27). Hermosillo, Sonora: Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora.

Laborde, C. (2003). ¿Porqué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? En J. Jiménez, E Hugues, Del Castillo A. y Dórame, E. (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 115-127). Hermosillo, Sonora: Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora.

PISA. (2003). *Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas* Extraído el 28 de Marzo de 2007 desde <http://www.ince.mec.es/pub/pisa2003liberados.pdf>

Anexo no. 1

4. La gráfica que se presenta a continuación, exhibe el comportamiento (tiempo contra posición) de un sistema masa resorte, determine la característica del movimiento del sistema que se solicita:



La dirección del contrapeso en el punto B

- a) No se mueve b) Hacia abajo c) Hacia arriba d) Ninguna de las anteriores

5. En base a la gráfica del problema 4. La segunda ocasión que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio y se dirige hacia arriba, es el punto:

- a) B b) C c) D d) F

9. La ecuación de movimiento que corresponde al movimiento sobreamortiguado de un sistema particular masa resorte es:

A) $x(t) = -\frac{2}{3} \cos(6t) + \text{sen}(6t)$

B) $x(t) = -e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$

C) $x(t) = e^{-t} \left(\frac{2}{3} \cos(6t) - 2 \text{sen}(6t) \right)$

D) $x(t) = -2e^{-t} + te^{-t}$