

ESTUDIO SOBRE CONSTRUCCIÓN Y USO DE GRÁFICAS

Eduardo Carrasco

Universidad de Valparaíso

ecarrascr17@yahoo.com

(Chile)

Resumen. El estudio que se presenta, profundiza el saber sobre el rol que las gráficas de variación pueden jugar en la construcción de aprendizajes sobre el pensamiento y lenguaje variacional. En particular en este reporte mostraremos los primeros resultados de la investigación que asume a la gráfica como una herramienta y se pregunta sobre la actividad matemática que promueve. Para enfrentar esta investigación se define como objeto de estudio la noción de ambiente de trabajo gráfico variacional como un espacio de interacción humana, el cual se constituye al establecer como central a la actividad la herramienta gráfica. Ambiente que se constituyen por las prácticas; las herramientas, los significados y argumentos que concurren al trabajo. Con el propósito de construir situaciones de enseñanza que promuevan más y mejores aprendizajes variacionales.

Palabras clave: ambiente gráfico, herramientas, lenguaje variacional

Abstract. The paper we present here is intended to deepen the knowledge we have on the paper variation graphics have on the construction of concepts associated with variational thinking and language. At his point we are presenting the first finding we had on our research, where we assume graphics as tools and we question ourselves about the mathematical activity promoted by its use. The center of our research is, then, the notion we called Variational Graphics Work Environment as a space of human interaction, where the center is the activity with the graphic tool. The environment also constituted by practices, tools, meanings and arguments, with the single purpose of producing educational situations that will result in more and better variational knowledge.

Key words: graphic environment, tools, variational language

El estudio que se presenta, busca profundizar saber sobre el rol que las gráficas de variación pueden jugar en la construcción de aprendizajes sobre el pensamiento y lenguaje variacional. A partir de las dificultades que muestran estudiantes con el trabajo de gráficas de variación (Dolores 2002; Arrieta, 2003; Buendía y Carrasco, 2009) se ha ido levantando un análisis que busca reconocer los significados y herramientas de pensamiento y lenguaje variacional que se han ido constituyendo en el devenir históricos de la construcción de la gráfica de variación. A partir de ellos se busca dar elementos que potencien el diseño situaciones de enseñanza que promueven más y mejores aprendizajes variacionales.

Elementos teóricos

Al entender la matemática como una construcción social, la mirada se centra en el sujeto social que actúa y construye saber. Por tanto, más que mirar a la gráfica como objeto matemático, nos focalizamos en la actividad matemática que ella propicia en los estudiantes. Así la intención, no es posicionarse en el objeto matemático, sino en el sujeto que actúa en torno a la gráfica. De igual modo se busca dar una mirada compleja, no por la dificultad intrínseca de lo que se mira, sino porque se busca dar cuenta de la actividad matemática

asociando nociones antagonistas e integrando la ambigüedad, comprender la complejidad de lo real de los objetos y su relación con el pensamiento que los concibe (Soto, 1999).

El estudiante es considerado en cuanto individuo, con su biología y su pensar actuando integradamente para acoplarse al mundo que le toca vivir, creando y aprendiendo, pero también como sujeto social, siendo parte integral de un grupo humano, asumiendo objetivos y formas de actuar social. En definitiva siendo constituido por la sociedad en que vive, pero a la vez construyendo esa sociedad. Por tanto, se requiere considerar la dualidad de sujeto individual/social y a partir de ahí focalizar el estudio en su actuar con otros y en la racionalidad de ese actuar.

Entendemos la racionalidad como “las coherencias operacionales de los sistemas argumentativos que construimos en el lenguaje para defender o justificar nuestras acciones” (Maturana, 2001) lo que constituye al lenguaje en una puerta para mirar al sujeto, a partir de su interacción con la tarea y con otros, a través de los procesos de construcción de consensos y coherencias en el transcurso de la actividad. Al decir de Díaz (2005) “Los estudiantes construyen sus aprendizajes en la actividad y dialogo constantes con otro y consigo mismos, movidos por su curiosidad ante un mundo que, de este modo, se les va desplegando”. Sujetos, por tanto, que son productos de un proceso de socialización cuya existencia presupone la existencia de una sociedad instituida (Castoriadis, 1986) que impone formas de actuar y de enfrentar problemáticas.

Entonces este trabajo asume la necesidad de un abordaje sistémico al trabajo estudiantil en torno a la graficación y sus significados, a su capacidad para argumentar desde ella, entendiendo un Estudiante que es producto de su contexto sociocultural y que aprende una matemática entendida como una construcción sociocultural. En síntesis se asume un marco socioepistemológico que estructura la mirada con un carácter social que está dado por tratar de entender el fenómeno educativo desde el sujeto que actúa.

Metodología

La primera fase, se orienta a constituir un instrumental de análisis, en definir el objeto de estudio. Para ello en una revisión bibliográfica y de producciones estudiantiles se definió el ambiente de trabajo gráfico como la articulación de cuatro facetas de actividad en torno a las gráficas de variación en el tiempo, estas articuladas en dos planos respecto del sujeto que actúa: a) El plano de las prácticas y Herramientas y el plano de los argumentos y los significados. La segunda fase, aún en desarrollo es la validación del modelo en una mirada histórica al trabajo con gráficas. Para ello, se identifica la actividad matemática en torno a las gráficas que se dieron en momentos históricos particulares. La selección de episodios está

dada por su potencialidad argumental del uso de las gráficas con el fin de reconocer en ella, la significación y la racionalidad presente en el actuar, las prácticas propias de su época. Siendo cuatro momentos analizados: a) Oresme y el Merton College. b) Galileo y la numerización del fenómeno c) Newton/Leibniz: Geometría v/s Física diferentes significados para la misma herramienta d) Weierstrass y el cambio de metáfora. La tercera fase, será validar el poder descriptivo del ambiente de trabajo gráfico mediante el análisis de producciones escolares respecto a la representación libre de fenómenos de variación. Ante consignas del tipo, “construye un cartel que comunique a otros el fenómenos que ves” o “representa la caída de una pelota del tercer piso”. Un análisis desde las construcciones realizadas, que permiten reconocer su significación y racionalidad.

Primeros resultados

En torno a la primera fase de construcción del objeto de estudio, se inicia la discusión en torno a la actividad matemática del sujeto. Un actuar en torno a gráficas de variación en el tiempo, en el cual se reconocen trazas de “formas de hacer” compartidas con su grupo social de pertenencia, más bien prácticas matemático escolares y cotidianas, en cuanto son formas de actuar genéricas en torno a un objetivo. Desde ahí, se configura el primer plano de actividad en torno a las gráficas:

El plano de prácticas y herramientas

Al reconocer la relación entre la actividad humana y la herramienta, surge la noción de práctica social, la cual “ejerce la función normativa en la relación existente entre actividad humana y praxis” (Covian, 2005). La estructura social, estructura-estructurante como señala Bourdieu (Manuel, 2003), será quien impulsará en los sujetos el desarrollo de ciertas prácticas, su uso y modificación que permite estructurar esa sociedad, modificando y estructurando a la práctica social en una relación compleja.

De modo que el actuar de un sujeto es estructurado no solo por la situación específica y sus ideas, sino por formas de hacer, prácticas, compartidas socialmente que son ejercidas por los sujetos, que en un contexto histórico y social, otorga una estructura y un significado a lo que hacemos (Arrieta 2003). El desarrollo de prácticas específicas de parte de los sujetos con su medio y con otros, va constituyendo una acción intencionada que le permite construir un mundo a partir del cual se acopla estructuralmente a la realidad que le toca vivir. Es en el desarrollo de prácticas que se construye el saber matemático, entendido este como “medios de organización de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones” (Puig 1993).

Entonces podemos reconocer diversos niveles en la descripción de esta actividad, la práctica social reconocida en un nivel macro social, cuya función normativa es la que se evidencia y no podemos necesariamente reconocerla en el actuar concreto del sujeto. En un nivel intermedio, entre esta práctica social y la actividad de los estudiantes, Montiel (2005) define a la práctica de referencia como la restricción a contextos específicos (de ingeniería, de medicina por ejemplo) de la práctica social y finalmente la actividad del sujeto en la cual podemos reconocer trazas de esa práctica social, trazas que reconoceremos simplemente como las prácticas que ejerce el sujeto. En síntesis en el actuar del sujeto se ve un actuar que es el resultado complejo de la coacción que sobre él que produce: las prácticas que ejerce, su biología, las particularidades del problema específico que enfrenta, así como toda su carga y biografía social, cognitiva y emocional.

Ejercer estas prácticas no es posible sin el uso de herramientas, las cuales permiten ejercer una práctica específica, y a su vez es la práctica que se ejerce la que da el estatus de herramienta al objeto. Se propone a la práctica social como generadora del saber matemático, como motor que condujo la construcción de las herramientas matemáticas para el cálculo, pero en la complejidad de la vida humana no podemos desconocer el rol que tiene la herramienta en la determinación de las prácticas que realizamos. Como señala Vygotsky (citado en Font, 2002, p.142) “si a un niño se le cambian las herramientas de pensamiento disponibles, su mente tendrá una estructura radicalmente diferente, y sostiene que sólo se puede comprender el desarrollo del lenguaje —que es una actividad práctica que permite la comunicación con los otros— teniendo en cuenta la actividad práctica del uso de herramientas”. Claramente el aporte de Oresme de construir un dibujo de lo que varía, de figurar la variación mediante herramientas geométricas, permitió una herramienta potente para el trabajo con la variación, el dibujo geométrico. Esta herramienta nueva de representación generó prácticas para entender como varían las cualidades, asociadas a lo geométrico, se pasó de un uso de la proporcionalidad numérica como base para ver lo que cambia, hacia un cálculo de áreas en que hablamos de cantidad de magnitud de movimiento y una proporcionalidad geométrica. Lo anterior implica incorporarnos a un lenguaje de las herramientas en que los objetos matemáticos ya no son entes que han de ser traspasados a un estudiante para que este los acumule, sino que son herramientas que el construye y utiliza para desarrollar la actividad. “Nuestros conceptos estructuras e ideas matemáticas han sido inventados como herramientas para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental” (Freudhental, 1983, citado en OCDE, 2003). Así en una epistemología basada en la actividad humana se debe explicar los conocimientos en términos de herramientas que usa el hombre

para hacer matemática. La acción se considera que siempre se encuentra mediada por herramientas.

El segundo plano de significados y argumentos

Al posicionarse en lo cognitivo, a partir de la actividad se construyen los significados respecto de los elementos presentes en dicha actividad, así en la medida que se enactan (en el sentido de Varela, 1990) los significados que están en directa relación con las estructuras que van surgiendo y que permiten actuar. Es, más bien, la significación o resignificación de nociones, herramientas, objetos, que se da según el mundo en el cual se está, en las prácticas que se involucra y las herramientas que utiliza. Al decir de Espinoza, (2009) se constituyen espacios de significación. Así el significado no proviene de algo construido y dado, como si se buscará la similitud con lo real a partir de una descripción de nuestra cognición, sino que es parte propia del actuar en el mundo, es enactar esquemas cognitivos de significado para poder vivir. El significado establece relaciones entre procesos y objetos (Cordero, 1998).

A modo de ejemplo podemos reconocer que el significado de tangente, será totalmente redefinido a la luz de su aplicación al estudio diferencial de curvas, estudio posibilitado por la herramienta gráfica introducida por Oresme. Desde un significado que la reconoce como una recta que toca en un solo punto a la figura, se resignifica, hacia una noción local a la curva en el cálculo diferencial, es más a reconocerlo de modo dinámico. Así el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. (Martínez, 2005). Más aún, la tangente en geometría se sigue entendiendo como aquella recta que interseca en un solo punto a la figura, con lo cual se puede articular los objetos, herramientas y sus procedimientos en una práctica propia de lo geométrico, mientras que en el trabajo de cálculo diferencial, se significará a la tangente como aquella recta que interseca localmente en un solo punto a la curva, la cual a medida que ese punto se “mueve” sobre la gráfica hará variar la inclinación y por tanto a la recta. Ambas significaciones de la recta tangente conforman esquemas cognitivos que no llegan a contradecirse necesariamente, al menos en quienes han logrado aprendizajes.

De este modo el significado se constituye, a la vez que condiciona el actuar de los sujetos, una racionalidad que se entiende como “las coherencias operacionales de los sistemas argumentativos que construimos en el lenguaje para defender o justificar nuestras acciones”. (Maturana, 2001). De este modo las argumentaciones entendidas como aquellas construcciones para convencer, donde se forman de los significados y los procedimientos generados y van formando un esqueleto argumentativo. Este andamiaje se va nutriendo en el

transcurso de la propia situación hasta que, en otro nivel de análisis, conforma en esquema explicativo que engloba todo lo anterior (Buendía, 2004).

Así el último factor que entra a configurar las condiciones en que se da el trabajo en torno a las gráficas de variación a considerar, serán las argumentaciones que son propiciadas por la actividad, el uso de herramientas y los significados que son puestos en juego. Argumentaciones que van configurando el tipo de relaciones que se dan entre quienes participan, en la construcción de argumento y en definitiva en el ambiente de trabajo que se estructura entre quienes actúan. Es el habla como espacio de coordinación de acciones consensuales de alto orden que permite o imposibilita un trabajo específico de un equipo que produce. Claramente podemos ver como el nivel de argumentación e interacción que se produjo entre Newton y Leibniz, o más bien entre las comunidades alemana e inglesa en torno al descubrimiento del cálculo, produjo una nula cooperación entre ambos hombres y una competencia de dos epistemes que aún hoy podemos reconocer en pugna.

De este modo el escenario de trabajo Gráfico se constituye en la interacción de las siguientes componentes que lo definen:

El conjunto de prácticas presentes. Tanto aquellas que se propician en la actividad propia de quienes trabajan, en su individualidad y particularidad, así como aquellas prácticas sociales que están al seno de la condición social de quienes actúan.

Las herramientas que concurren al trabajo. Entendiendo por herramientas a todos aquellos elementos matemáticos que concurren a entender lo que varía y cómo varía desde diferentes marcos conceptuales.

Los significados que se portan en la gráfica. Los elementos que constituyen la gráfica son símbolos que portan significados particulares de quienes las construyen y que deben ser conocidos por quienes las interpretan.

Las argumentaciones que se propician. Los sujetos involucrados en esta actividad especifican, levantan argumentaciones para convencer, explicar y llegar a consensos con otros. Ellas son articuladas desde los significados herramientas y prácticas ejercidas en el ambiente.

Primeras clasificaciones de ambientes de trabajo

El ambiente de Trabajo Gráfico de Oresme. El trabajo de Oresme es fundacional en la construcción de la gráfica de variación. Oresme en una *práctica* de figuración de las cualidades (Arrieta, 2003) busca construir un dibujo de lo que varía y en particular le interesa describir la variación de las cualidades (velocidad, calor, dolor, por ejemplo), que al seno de su época no eran consideradas magnitudes medibles. Señala Oresme que “la intensidad expresa

también la idea de que una cosa es ‘mas esto’ o ‘mas aquello’, por ejemplo, ‘más blanca’ o ‘más rápida’. Esta intensidad, o más precisamente intensidad en un punto, es divisible de una sola forma e infinitamente, como un continuo. No se la puede representar mas adecuadamente, por lo tanto, que bajo la forma del continuo que es originalmente divisible y de una sola forma, es decir, por una recta” (Oresme, citado en Ramírez, 2007). Así, a partir de la metáfora construida, se significa a una cualidad como un segmento y de este modo se consigue una figura geométrica para la variación de una cualidad, asociando el segmento perpendicular en un punto específico como la intensidad en ese punto de la cualidad. Entonces el área es *significada* como la totalidad de la variación. Incorporando por tanto las *herramientas* geométricas para entender que y como varia lo que varía.

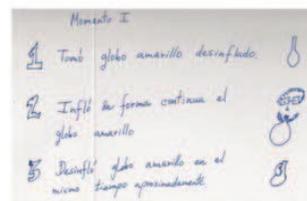
Así los *argumentos* son de análisis geométricos, pueden trabajar de modo cualitativo la variación, consiguiendo medidas enteras, y realizando cálculos exactos en un trabajo cualitativo propio de su época, previa a Galileo.

Ambiente de Trabajo Gráfico de Geometría Analítica. El trabajo de Fermat y Descartes, permite la incorporación al trabajo geométrico de las expresiones algebraicas. Newton y Leibniz de este modo incorpora al estudio de la variación herramientas analíticas, constituyendo el paradigma Geométrico del trabajo de Newton. Esto se produce, bajo el desarrollo de *prácticas* sociales de predicción (Cantoral, 2006), se da un contexto de *significación* de la curva como la traza de un punto que se mueve. A partir de ello construye el método de las fluxiones, en donde las cantidades x , y , son significadas como segmentos que desde herramientas analíticas para el trabajo con infinitesimales, le permite encontrar las características deseadas de la variación por métodos infinitesimales. De esta forma los *argumentos* que se generan responden a “La posición del punto como referencia temporal”, a la forma de la figura y sus elementos, por ejemplo la curvatura de una función, se argumenta desde el radio de la mayor circunferencia tangente posible.

No explicitado en este trabajo principalmente por espacio, resta el ambiente de trabajo del análisis matemático, que responde a la reformulación del cálculo de Weierstrass, que constituye la gráfica como conjunto de puntos.

Desde las producciones estudiantiles

Representaciones Icónicas. A partir de pedir a estudiantes que representen la caída de una pelota, vemos construcciones icónicas del movimiento (fig. 1) Entendidas como representaciones libres de parte de quien trabaja, estas se caracterizan por utilizar recursos pictóricos para



representar variaciones en el tiempo. De igual modo al pedir a profesores (en curso de Relme 21) comunicar lo que cambia en una situación (fig. 2) Los profesores igual recurren al comic, como principal herramienta para visualizar lo que varía.



De este modo reconocemos preliminarmente el comic como un ambiente de trabajo gráfico que remite a prácticas icónicas de representación. La práctica de figurar lo que varía, hace uso de herramientas pictóricas, dibujando los momentos donde cambia algo observable, el globo se infla, o desinfla, la pelota parte o cae al suelo (ver figuras 1 y 2). Las variables que interesa describir quedan inmersas en la reproducción pictórica de la escena, sin embargo aquellas variables que se perciben con la mirada, como el tiempo, pueden ser descritas, o con simbología particular o en descripciones adjuntas. Los significados que se trabajan en la situación surgen de reconocer al movimiento en una sucesión de imágenes, el tiempo queda implícito en la variación de las de las escenas (cambio de posición del sol respecto de la nube en la figura), lo que muestra una significación del tiempo como artefacto de sincronía (Carrasco, 2006). Las argumentaciones, son entonces evocadas desde la secuencia de imágenes y desde la percepción y memoria visual, se argumenta desde un “yo lo vi”, “el globo se inflo” y se exige esas descripciones argumentaciones a la par de la escena.

En síntesis el ambiente de trabajo gráfico, nos permite una mirada sistémica al trabajo de la variación, reconociendo elementos centrales de una socioepistemología con miras a un diseño de situaciones de enseñanza. Así esperamos articular en una situación de enseñanza a partir de una situación articuladora, un fenómeno de cambio en el cual la necesidad de predecir (entendida esta como una práctica social a la base de la construcción del cálculo (Cantoral, 2006)), y de describir lo que varía se articulan diversos ambientes gráficos para la construcción de parte del estudiante de herramientas y significados variacionales.

Referencias bibliografía

- Arrieta, J. (2003). *Las practicas de modelación como proceso de matematización en el aula*. México. Tesis Doctoral no publicada, Cinvestav.
- Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. México: Tesis Doctoral no Publicada, Cinvestav.
- Buendía, G., & Carrasco, E. (2009, V.21). *Gráficas de Variación: Reflexiones sobre la visualización de la curva*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa , 35-41.
- Cantoral, R., Farfán, R.-M., Lezama, J., & Martínez Sierra, G. (2006). *Socioepistemología y*

- Representación*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 83-102.
- Carrasco, E. (2006). *Grafica de Variación en el tiempo*. Mexico: Tesis de Maestría no Publicada, CICATA.
- Castoriadis, C. (1986). *El campo de lo social historico*. Estudios (N4), 7-25.
- Cordero, F. (1998). *El entendimiento de algunas categorías del conocimiento cálculo y del análisis: El caso del comportamiento tendencial de las funciones*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa , 56-74.
- Covian, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya*. México: tesis de Maestría no Publicada, CINVESTAV.
- Diaz, L. (2005). *Profundizando en los Entendimientos estudiantiles de variación*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 125-563.
- Dolores, C., Alarcón, G., & Albarran, D. (2002). *Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 103-128.
- Espinoza, L. (2009). *Una Evolución de la Analiticidad de las Funciones en I Siglo XIX. un estudio socioepistemológico*. México: Tesis de Maestría no Publicada, CINVESTAV.
- Font, V. (2002). *Una Organización de los Programas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. EMA , 127-170.
- Manuel, F. (2003). *Habitus y sentido práctico: la recuperación del agente en la obra de Bourdieu*. España, Cuadernos de Trabajo Social , 7-28.
- Martinez, G. (2005). *Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa , 195-218.
- Maturana, H. (2001). *Emociones y Lenguaje en Educación y Política*. Santiago. Ed. Dolmen.
- Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función Trigonométrica*. México: Tesis Doctoral no Publicada, Cicata.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. OECD. Published.
- Puig, L. (1993). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal*. Educational Studies in Mathematics , 1-164.
- Ramírez, J. (2007). *Reflexiones sobre las Ideas de Nicolás Oresme*. Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia , V. LIX, 23-24.

Soto, M. (1999). *Edgar Morin. Complejidad y Sujeto Humano*. Valladolid. Tesis Doctoral no Publicada. Universidad de Valladolid.

Varela, F. (1990). *Conocer*. España. Gedisa.