LA COMPRENSIÓN DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO Y LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Estela Rechimont, Nora Ferreyra, Nora Andrada, Carlos Parodi
Universidad Nacional de La Pampa Argentina
rechimont@exactas.unlpam.edu.ar, noraf@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Resolución de problemas Nivel: Superior

Resumen. *El concepto de lugar geométrico resulta, a veces, complejo en su determinación y tal vez se deba a la posibilidad de representación en distintos registros que implican diferentes niveles de abstracción y significados. Ante situaciones relacionadas a la temática de lugar geométrico, los alumnos, generalmente, resuelven en registro gráfico solamente. Ello pone de manifiesto la existencia de dificultades para expresar el problema en un registro algebraico que caracterice el conjunto de puntos correspondiente.*

El presente trabajo analiza la respuesta de estudiantes de los primeros años de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, ante el problema de determinación del conjunto de puntos que verifican una condición dada.

Palabras clave: problema, lugar geométrico, representación, estudiantes

Introducción

Es evidente que el análisis y estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se desarrollan, en muchos casos, alrededor del uso de nociones semióticas y de representación.

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento. Las estructuras matemáticas adquieren significado para el sujeto mediante el trabajo con las representaciones, y de aquí surge su interés didáctico.

No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática (Duval, R., 1995).

Dentro de las formas convencionales de representación es común distinguir dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* y *representaciones gráficas* (Rico, 2000).

Como *representaciones simbólicas* se tienen las representaciones de carácter alfanumérico. Las *representaciones gráficas* incluyen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación.

La representación pone en consideración el objeto *representante* (símbolo o representación) y el objeto *representado* (conceptos o contenidos conceptuales) que Godino y Batanero (1994) denominan, respectivamente, *significante* y *significado*.

Duval (1995) establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracteriza por signos propios y la forma en que estos se organizan. Estos registros constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor. Considera tres fenómenos estrechamente vinculados y que deben tenerse en cuenta en la relación de enseñanza-aprendizaje:

- *Diversificación de los registros de representación semiótica*.
- *Diferenciación entre representante y representado.*
- *Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica.*

La comprensión de un concepto matemático pone de manifiesto diferentes registros de representación y es necesaria la coordinación de los mismos. La representación en un solo registro difícilmente da la posibilidad de una comprensión integral del concepto.

Para el análisis que realizaremos en un problema propuesto a alumnos de la carrera Profesorado en Matemática tendremos en cuenta las siguientes entidades:

- *Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, tanto oral como escrito).*
- *Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, intramatemáticas, ejercicios).*

- *Conceptos: Definiciones o descripciones (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, .).*
- *Propiedades: Enunciados o proposiciones.*

Consideramos, en la solución del problema, elementos ostensivos, extensivos e intensivos.

Los elementos ostensivos son cualquier representación material usada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos) y las entidades lingüísticas/notacionales. En los extensivos incluimos las entidades fenomenológicas como situaciones-problemas, aplicaciones. Los elementos intensivos son las ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones, teorías).

Experiencia

En general, un problema es una situación que ubica a quien lo resuelve ante la necesidad de desplegar su actividad cognitiva en una experiencia de búsqueda de estrategias, elaboración de conjeturas y toma de decisiones. En un problema podemos identificar las siguientes características: existe un objetivo claramente definido; la solución no es inmediata ni alcanzable mediante procedimientos rutinarios sino que, por el contrario, requiere reflexión y coordinación de experiencias y conocimientos previos para acceder a un resultado y, finalmente debe ser accesible al sujeto que está intentando resolverlo, es decir que éste pueda identificar posibles soluciones y elegir entre ellas la más adecuada.

El concepto de lugar geométrico en matemática resulta, a veces, complejo en su determinación y ello tal vez se deba a la posibilidad de representación en distintos registros que generan diferentes niveles de abstracción y significados.

En situaciones de enseñanza-aprendizaje y, considerando la temática de lugar geométrico, hemos observado que los alumnos, generalmente, presentan la situación propuesta en un registro gráfico evidenciando dificultades para expresarla en un registro algebraico que permita justificar las conjeturas elaboradas a priori.

Para abordar la investigación en torno a la comprensión de conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas, se trabajó con un grupo de alumnos del Profesorado en Matemática que cursan el segundo año de la carrera en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estos alumnos han aprobado asignaturas básicas por lo que tienen conocimientos de Álgebra y Análisis.

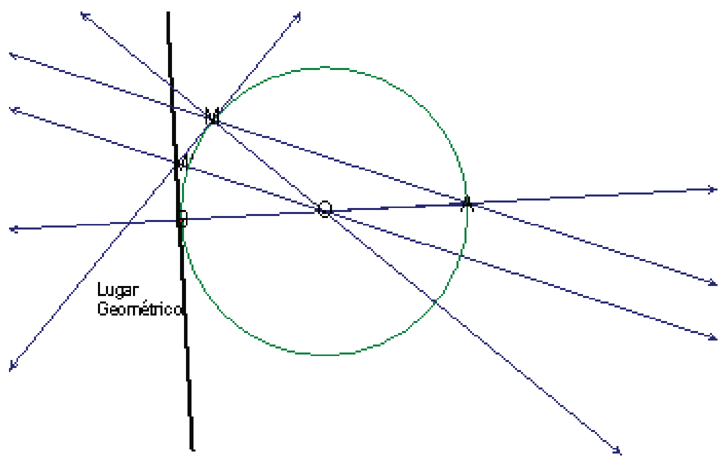
Se presentó a los alumnos, un problema de Lugar Geométrico.

Problema:

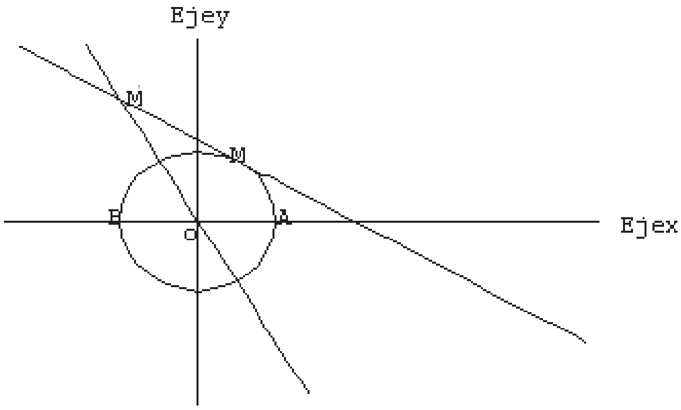
Sea C una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. *M un punto sobre la circunferencia y R la recta tangente a C por M. Sea M' el punto de intersección de esta tangente con la recta paralela a* $\overline{AM}$ *que pasa por O. Determinar el lugar geométrico de los puntos M' cuando M recorre C.*

Resolución a priori:

En un *registro gráfico*, se utilizaron construcciones con regla y compás y posteriormente se utilizó el software Sketchpad que permite visualizar el lugar geométrico a través de la herramienta de animación. Se muestra a continuación, el gráfico en un instante determinado de la animación.



En el *registro algebraico,* se confirma la solución hallada gráficamente, obteniendo una recta tangente a la circunferencia por el punto *B*.



Sea $M=(x_m,y_m)$, $r=\dfrac{AB}{2}\rightarrow A=(r,0)$ y $r^2=x_m^2+y_m^2$

Sea α el ángulo AOM, entonces $tg\,\alpha=\dfrac{y_m}{x_m}$

Sea *t* la recta tangente a la circunferencia por el punto *M*, entonces la ecuación de *t* es:

$y-y_m=-\dfrac{x_m}{y_m}(x-x_m)$ entonces $y-y_m=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{x_m^2}{y_m}$, luego $y=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{x_m^2}{y_m}+y_m$

$\rightarrow\ y=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{x_m^2+y_m^2}{y_m}$, de donde: $y=-\dfrac{x_m}{y_m}x+\dfrac{r^2}{y_m}$.

Sea *l* la recta que contiene los puntos *A* y *M*, entonces

$l:-\dfrac{y-y_m}{y_m-0}=+\dfrac{x-x_m}{x_m-r}$ entonces $y-y_m=\dfrac{x-x_m}{x_m-r}\,y_m\ \rightarrow\ y-y_m=\dfrac{y_m}{x_m-r}x-\dfrac{x_m y_m}{x_m-r}$

luego: $l:\ y=\dfrac{y_m}{x_m-r}x-\dfrac{r y_m}{x_m-r}$

Sea *l'* la recta paralela a *l* por *O*, centro de la circunferencia, entonces la ecuación de *l'* es

$$y = \frac{y_m}{x_m - r}x$$

La intersección *M'* de *t* y *l* es la solución del sistema: $\begin{cases} y = -\dfrac{x_m}{y_m}x + \dfrac{r^2}{y_m} \\ y = \dfrac{y_m}{x_m - r}x \end{cases}$

$$-\frac{x_m}{y_m}x + \frac{r^2}{y_m} = \frac{y_m}{x_m - r}x \text{ entonces } \left(\frac{y_m}{x_m - r} + \frac{x_m}{y_m}\right)x = \frac{r^2}{y_m}$$

$$\frac{y_m^2 + (x_m - r)x_m}{(x_m - r)y_m}x = \frac{r^2}{y_m} \text{ entonces } \frac{r^2 - r\,x_m}{x_m - r}x = r^2 \rightarrow \frac{-r(x_m - r)}{x_m - r}x = r^2$$

Es decir que $x = \frac{r^2}{-r} = -r$, luego: $y = \frac{-y_m r}{x_m - r} = \frac{y_m r}{r - x_m}$

Resulta entonces que $M' = \left(-r, \frac{y_m r}{r - x_m}\right)$, esto es, *M'* pertenece a la recta perpendicular a *AB*, que pasa por *B*.

Si $x_m = r \rightarrow M'$ está en el infinito

Si $x_m = -r \rightarrow M' = \left(-r, \frac{y_m r}{2r}\right) = \left(-r, \frac{y_m}{2}\right)$ y como en ese caso, $y_m = 0 \rightarrow M' = (-r, 0)$.

Por lo tanto, el *lugar geométrico* de *M'* es la recta $x + r = 0$, tangente a la circunferencia en el punto *B*.

Análisis didáctico de la solución del problema

El enunciado del problema es el elemento extensivo y el correspondiente registro semiótico es un registro verbal.

A partir del enunciado, la imagen mental de la situación que plantea la representamos en registro figural que da, en cierta forma, el punto de partida a los distintos registros de representación involucrados en la solución.

En este análisis se explicitan diversos registros y se ponen en juego conversiones de uno a otro, teniendo en cuenta la correspondiente coordinación. Ello implica, cada vez, posicionarse en un determinado registro del cual es necesario conocer sus reglas lógicas.

Este análisis permitirá identificar:

- Puntos críticos implícitos en la resolución. Por ejemplo, la ubicación del diámetro AB de la circunferencia en un sistema de coordenadas ortogonales.
- La necesidad de ciertos conocimientos previos. Por ejemplo conceptos básicos de geometría analítica, solución de sistemas de ecuaciones.

  Además se pueden prever estrategias didácticas, que pueden presentar los alumnos para afrontar dicha solución. También permite mostrar la compleja trama de entidades y relaciones entre los registros de representación en juego en una actividad matemática.

Producción de los alumnos

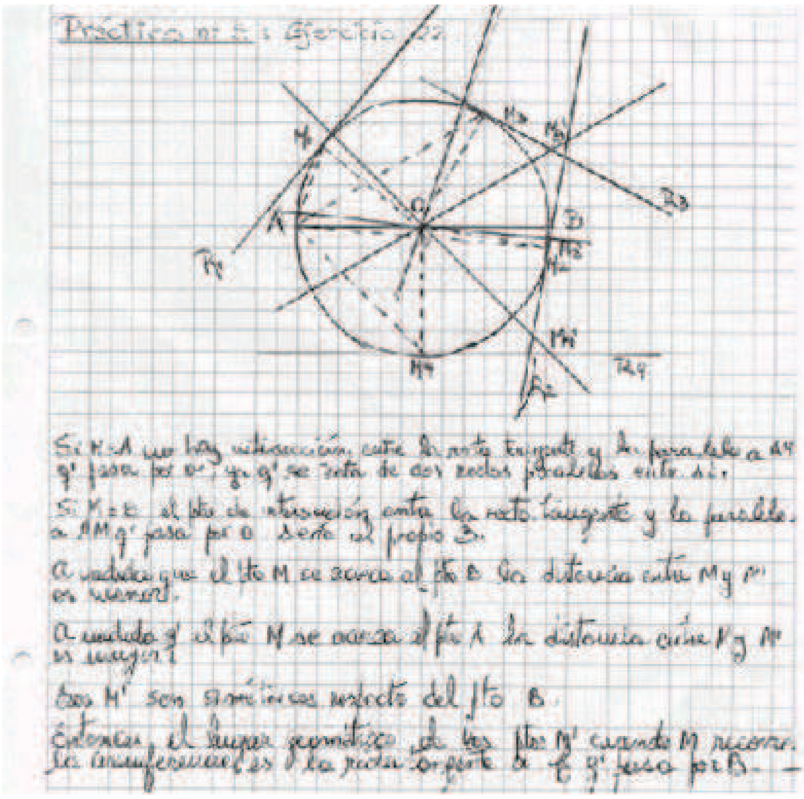
La tarea propuesta se entregó a 12 (doce) alumnos. Los alumnos en su mayoría resolvieron el problema en el registro gráfico-geométrico y no lograron justificar su conjetura en un registro algebraico.

Algunos alumnos intentan el cambio de registros de representación pero la conversión entre los dos registros (gráfico y algebraico) no se realiza de manera adecuada o se realiza de forma incompleta. Ello pone de manifiesto la falta de comprensión de algunos conceptos matemáticos involucrados en la resolución. Otros alumnos solamente efectuaron el desarrollo en el registro gráfico y concluyeron a partir de éste.

Es sabido que con la representación en un solo registro no se obtiene la comprensión integral de un concepto y, lamentablemente, no se manifiesta en la mayoría de los trabajos analizados la coordinación de al menos dos registros de representación.

Pareciera que los alumnos no descubren la relación, implícita en el problema, que permite justificar la conjetura que surge del registro gráfico.

A modo de ejemplo se muestra el trabajo de uno de los alumnos.



Conclusiones

El análisis a priori realizado para el problema presentado, pone de manifiesto una solución en un registro geométrico-algebraico utilizando representaciones de uso frecuente por parte de los alumnos.

Consideramos que este tipo de análisis es útil para describir los procesos de interpretación y comunicación del saber matemático, e identificar las razones que pueden condicionar la actividad de aprendizaje.

A priori, el equipo de investigación esperaba que la resolución del problema planteado se realizara en un marco geométrico-algebraico. Sin embargo, los alumnos no logran bosquejar un desarrollo algebraico y prácticamente ni lo intentan.

Resultó evidente que los estudiantes realizan las resoluciones de problemas fundamentalmente en un registro gráfico-geométrico y que la utilización de herramientas algebraicas no surge espontáneamente, aún cuando dichas herramientas hayan sido consideradas explícitamente en asignaturas anteriores.

Es importante trabajar con problemas que permitan que los alumnos adquieran habilidades en el tratamiento de distintos registros de representación y la correspondiente conversión entre ellos, como condición necesaria para resolver problemas y procurar el desarrollo del pensamiento matemático.

Los alumnos identifican mayormente el registro gráfico pues resulta más intuitivo, esto implica que la comprensión de la situación es a un nivel intuitivo, y como no hay correcta coordinación entre distintos registros, no se logra una comprensión a un mayor nivel de abstracción.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berna: Peter Lang S.A., Editions Scientifiques Européennes.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares. Colección MATHEMA, Nº 6.

González, F. (2001). *Cómo desarrollar clases de matemática centradas en Resolución de Problemas*. Caracas, Venezuela: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. Contreras et al. (Eds) *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.219-231). Huelva, España: Publicaciones Universidad de Huelva.