

UN ESTUDIO DEL CONCEPTO DE VARIABLE EN LOS LIBROS DE TEXTO

Lina Morales Peral, José Luis Díaz Gómez

Universidad de Sonora

lina@gauss.mat.uson.mx

Campo de investigación: Pensamiento Algebraico

México

Nivel: Básico, Medio y Superior

Resumen. *Se han encontrado evidencias de que estudiantes, tanto de primaria como de universidad, tienen dificultades para resolver ciertos tipos de problemas de álgebra. Los errores que manifiestan subyacen en parte, en una tenue y mal definida concepción de lo que son las variables y del papel que juegan en la resolución de problemas. Parte de esta problemática tiene que ver con el hecho de que los libros de texto dedican muy poco espacio y tiempo a la discusión y definición del concepto de variable, así como a la forma en que se define. Con el propósito de buscar respuestas a estas dificultades se realizó un análisis de libros de texto. Se examinó la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla. En este artículo presentamos resultados de este análisis.*

Palabras clave: variable, análisis de textos, enseñanza del algebra

Introducción

En los cursos de Matemáticas de todos los niveles educativos, los libros de texto y los materiales escritos son los principales, y clásicos, materiales de apoyo para la enseñanza. La producción abundante de estos materiales, y su función como transmisores de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Así pues, podemos considerar a los textos como importantes recursos instruccionales, que caracterizan de alguna manera la enseñanza y el aprendizaje. La forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden (qué y cómo), si admitimos que proporcionan la mayor parte del contenido matemático que los estudiantes deben aprender.

Desde un punto de vista superficial, puede observarse el gran esfuerzo realizado por las editoriales en actualizar el formato y la presentación de los textos. En cambio, resulta difícil determinar si en ellos se ha incorporado, y de qué manera, los resultados obtenidos

en investigaciones sobre la forma en que se aprenden algunas nociones matemáticas, realizadas en el campo de la Matemática Educativa.

Con el propósito de observar hasta que punto se ha dado esta incorporación en relación con el concepto de variable efectuamos una somera revisión de algunos libros de álgebra. Esta revisión nos muestra que algunos libros le dedican a lo más una página para explicar el concepto de variable, pero otros generalmente mucho menos, e incluso algunos no definen el concepto. Esto a pesar del hecho de que la matemática contenida en ellos se basa en la existencia de variables, y que estas predominan virtualmente en cada página de los textos, sin contar, que las definiciones que se encuentran en ellos son distintas y utilizan diferentes formas para definirlos.

Problema

Varios investigadores como Matz (1982), Trigueros y Ursini (2000) entre otros han encontrado evidencia convincente de que muchos estudiantes, tanto de primaria, como de universidad tienen dificultades para resolver ciertos tipos de problemas elementales de álgebra. La evidencia muestra que los errores manifestados por los estudiantes subyacen, en parte, en una tenue y mal definida concepción de lo que son las variables y qué papel juegan en la resolución de problemas. En particular, de acuerdo con nuestra revisión preliminar, creemos que parte de esta problemática tiene que ver con el hecho de que los libros de texto dedican muy poco espacio y tiempo a la discusión y definición del concepto de variable, así como a la forma en que se define este concepto. Así pues, con el propósito de buscar respuestas a estas dificultades realizamos una revisión más profunda de algunos libros de texto en el ámbito en el que trabajamos. Creemos que aunque la revisión de la bibliografía no es exhaustiva, presenta una amplia gama de estilos de la presentación y del contenido.

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos de investigación. En este artículo se presentan los resultados de una revisión de libros de texto de matemáticas. Dicha revisión se centró en un aspecto del currículo: la presentación del concepto de variable.

Diferentes formas de analizar los textos

Centrándonos en el campo de la educación matemática, Howson (1995) distingue entre investigaciones realizadas sobre textos a posteriori, es decir, la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado; y las realizadas a priori. Entre estas últimas se menciona el trabajo de Chevallard (1985), en los que aparece la noción de transposición didáctica, es decir, la transformación de la matemática en el contenido escolar, que se refleja fundamentalmente en los libros de texto.

Por otro lado, se han desarrollado dos líneas de actuación en relación al análisis de los libros de texto, las cuales comentaremos brevemente (García y Llinares, 1995). Podemos considerar:

1. Estudios centrados en el análisis de la forma en que se reflejan en ellos los contenidos, adoptándose dos puntos de vista:

1. Los que se han ocupado del propio instrumento de análisis que se aplica al texto. Entre ellos mencionamos:

Van Dormolen (1986) y Otte (1986) ponen énfasis en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y su representación textual y las variaciones en las interpretaciones. Sanz (1990) se centra en la necesidad de considerar los modos de representación utilizados, para realizar inferencias relativas al significado de las ideas matemáticas que los textos transmiten.

2. Los que eligen un tópico concreto y examinan la forma en que este contenido particular se contempla en diferentes textos. Como Küchemann (1987), que intenta ver cómo un mismo tópico (razón y proporción) se caracteriza en diferentes libros de texto.

II. *Estudios centrados en el uso que se hace de los textos en las situaciones de enseñanza.* Freeman y Porter (1989) describen diferentes estilos en el uso de los libros de texto de matemáticas por los profesores, en el nivel de enseñanza primaria, y examinan el solapamiento entre el contenido enseñado y el contenido que aparecía en los textos.

El trabajo que aquí presentamos se encuadra dentro de aquellos que eligen un tópico y examinan las diferentes formas en que éste se presenta. Examinamos la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla. Sin duda que el análisis pudiera ser mucho más completo, sin embargo, para nuestro trabajo el que realizamos es suficiente.

Metodología

1. Se recopilaron libros de primaria, secundaria, preparatoria y universidad, además de algunas enciclopedias recomendadas para diversos niveles.
2. Se analizó cada libro buscando la definición de variable que presenta el libro o la página donde aparece por primera vez la palabra variable.
3. Con los datos anteriores se formó una tabla de datos que contiene la información de la definición que contiene el texto y la referencia del texto.
4. Se realizó un análisis de las definiciones buscando regularidades sobre el enfoque con que se presenta y términos matemáticos que intervienen en la definición siguiendo una clasificación dada por Peter Rosnick (1980).
5. Se realizó un análisis de las definiciones para clasificar el uso que se le da en los textos de acuerdo con la clasificación siguiente: como incógnita, como número general, como variable, como relación funcional.

A continuación mostramos dos definiciones representativas.

“La letra x se llama variable y el conjunto R cuyos elementos la remplazan se llama conjunto satisfactor. Cada vez que se usa una variable, debe uno saber cuál es el conjunto satisfactor”. Lovaglia, F. M. 1972. Álgebra. Harla. Pág. 8 – 9.

“Una expresión algebraica es una colección de letras llamadas variables y números reales organizados de alguna manera utilizando sumas, restas multiplicaciones divisiones y radicales”. Larson, R, Hostetler R. 1985. College Algebra. D.C. Hearth and Co. Pág. 30.

Resultados

El total de libros revisados fue de 99, y la revisión de las definiciones dadas en ellos nos muestra que el concepto de variable se define con diferentes enfoques y para definirla o explicarla se utilizan varios términos que mencionamos abajo, así como el número de libros que los sustentan:

1. **El conjunto de reemplazo.** El conjunto de reemplazo de una variable se compone de todos los elementos que se puedan sustituir por la variable. Este conjunto puede estar compuesto por cosas, por un número o por un conjunto de números. En el álgebra de la secundaria el conjunto de reemplazo es casi siempre el conjunto de los números reales, pero en el Álgebra Lineal el conjunto puede estar formado por vectores, y en las Ecuaciones Diferenciales por funciones.

Sin embargo, al introducir el concepto de variable no se presenta una definición que comprenda todas las posibilidades del conjunto de reemplazo, sino que sólo se menciona que la variable representa números, haciendo poco abstracto este concepto. Las siguientes son algunas de las formas comunes en que se describe el conjunto de reemplazo en los textos revisados:

a) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas.** Una definición muy general es la que da Mazani y colegas (p. 34, 1968): “Las letras tales como a, b, c, \dots que pueden representar cualquier elemento (definido, pero no especificado) de un conjunto

- (Este conjunto puede estar formado por cualquier tipo de objetos; personas, números, funciones, etc.) se llaman variables. 11 libros.
- b) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de números.** Generalmente números reales, pero este hecho se pierde en muchos estudiantes, porque de acuerdo con Matz (1982) los estudiantes ven las variables como etiquetas para simbolizar entidades concretas, en vez de cosas abstractas relacionadas con números. La definición de Barnett (p. 234,1960), está dentro de esta categoría, define: “Una variable en álgebra es una letra que representa cualquier número de un conjunto de números bajo discusión cuando el conjunto contiene más de un número”. 46 libros.
- c) **La variable se reemplaza por un único número.** En este caso no hay referencia a un conjunto y tampoco hay una referencia a la naturaleza múltiple de la variable. En el libro “Matemáticas Aplicaciones y Conexiones (Glencoe, p. 12, 1999) se menciona; “Algunas ecuaciones además contienen variables. La ecuación $x + 9 = 17$ no es ni verdadera ni falsa hasta que x se sustituya con un número que la hace verdadera. Resuelves la ecuación cuando reemplazas la variable con un número que la hace verdadera”. 6 libros.
- d) **Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c).** En algunos textos el autor introduce las variables y utiliza el símbolo de “guardalugar” \square para representar la variable. En el libro Gráficas y Relaciones y Funciones, de la NCTM (p. 13, 14, 1979), se utilizan además del símbolo \square , los símbolos Δ , n , x para representar la variable. 6 libros.
- e) **Textos que no tienen una definición explícita de variable.** Como en el texto de Álgebra I del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (1987) que utiliza el concepto de variable hasta la página 77 para describir un polinomio: “Puesto que usaremos en esta sección y en las demás de este capítulo las expresiones algebraicas llamadas polinomios, escribiremos $P(x)$ en

lugar de la proposición: un polinomio en la variable x ...” Proposición que no se encuentra en las páginas anteriores, así como la definición de variable, pero que partir de esta página utiliza *la* palabra variable.

2. **Variación.** Las definiciones de los libros transmiten diferentes formas en las que varía la variable. Se presentan al menos tres posibilidades:

a) **Variables que no varían.** Esto es lo que con frecuencia se llama la incógnita. Se le encuentra en los textos cuando se resuelve un problema para el cual hay una respuesta única o la mayoría de las veces muchas respuestas finitas. Por ejemplo: “encuentre el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual a 21”. La solución del problema es la ecuación $3x = 21$, donde x representa el lado del triángulo. A pesar de que la variable x tiene como conjunto de reemplazo todos los números positivos conceptualizamos un triángulo único y el lado de este triángulo no cambia. Muchos libros de texto presentan solamente problemas verbales que tienen una única respuesta numérica. En éstos el estudiante puede deducir que el único reemplazo apropiado para una variable es un único número. Thompson, (p. 38, 1976) en su definición de variable escribe: “Las ecuaciones $3x - 5 = x - 3$, $x = x + 1$, y $b^2 = 4$ contienen una letra como variable. Si reemplazamos la letra con un número obtenemos una expresión que es falsa o verdadera”. Y a partir de aquí utiliza las variables. 22 libros.

b) **Variables discretas.** La consideración de las variables en las relaciones funcionales difiere de la situación "estática" descrita en (a). Una forma de demostrar la naturaleza discreta de la variabilidad de una variable está con las tablas, una técnica utilizada por varios textos, aunque no se defina el concepto de variable como sucede con los libros de educación primaria. 23 libros.

x	C
1	2
2	4
3	6

Por ejemplo, en el problema de encontrar el costo C de producir x cajas de cartón, donde el costo se encuentra con la expresión $C = 2x$, a través de la tabulación.

La variable x representa una variable discreta con un número infinito de valores.

c) **Variables continuas.** En general se presenta de la misma forma que en (b) excepto que se considera que la variable cambia continuamente. Un ejemplo de una variable que varía continuamente es la de la ecuación $s(t) = 50t$ donde s es la distancia y t es el tiempo (Lang, p. 15, 1990). Sin embargo, es difícil comunicar el concepto de variación continua ya que el acto de reemplazo debe de hacerse discreto. Es decir, es difícil mostrar la naturaleza continua de la variable s asignando valores a t en la expresión $s(t) = 50t$. Y esto se complica más porque aun cuando el tiempo y la distancia son conceptualmente continuos, cualquier medida de ellas debe de ser discreta. Debemos de cuestionarnos aquí en si el tratar con entidades continuas discretamente simplifica el problema o si esta es una sobre simplificación que pierde la esencia de la continuidad. 6 libros.

3. **En términos de constantes.** Algunos textos hacen la distinción entre constantes y variables, otros no. Así como el concepto de variable tiene una multitud de definiciones, también lo tiene el término "constante". Algunos textos definen

constante, otros como un caso especial de una variable, y otros no la definen, como lo hace Barnett p. 3, 1984 donde dice que una constante es un símbolo que corresponde exactamente a un objeto. 1 libro.

4. Como componente de otro concepto matemático. Una característica de varios libros es que definen variable y constante cuando definen expresión algebraica, o polinomio, o ecuación, o fórmula, o bien utilizan alguna expresión particular de algún problema algebraico, mencionamos algunos ejemplos:

“Utilizaremos letras (llamadas variables) y números al formar las expresiones y proposiciones con las que trabajaremos. Una expresión algebraica es una colección de variables y números reales (llamados constantes) organizados de tal manera utilizando sumas, restas,..” (Larson/ Hostetler, p. 40, 1985).

“Un término (llamado también monomio) es una expresión que está compuesta por una constante o un producto de constantes y variables elevadas a potencias positivas” (Peterson, p. 11, 1985). 21 libros.

Estas definiciones oscurecen el significado real de variable. Una variable es un símbolo que representa una cantidad, relación u otras estructuras matemáticas, pero la esencia de una variable es que representa un conjunto de cantidades, relaciones o estructuras matemáticas. Cuando las variables son introducidas en el interior de una ecuación, los estudiantes frecuentemente desarrollan el error conceptual de que la variable representa un sólo número: el valor que hace que una ecuación tenga solución.

5. No define variable, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización. 35 libros.

6. No define ni utiliza la palabra variable en el texto. 16 libros.

7. Clasificación de acuerdo al uso.

a) Como **incógnita**, 30 libros. (b) Como **Número General**, 65 libros; (c) Como **Relación Funcional**, 35 libros.

Conclusiones

Las experiencias que se tienen con la aritmética son importantes para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la “aritmética generalizada”. El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. Sin embargo, los resultados de varias investigaciones con estudiantes de todos los niveles nos muestran la persistencia de concepciones erróneas y la evidencia de que el concepto de variable es una cuestión confusa para los estudiantes.

Creemos que parte de esta problemática se debe a que el concepto de variable es en sí mismo muy difícil de definir y esto se corrobora con los resultados del análisis de la presentación de la definición de 99 textos de matemáticas. Estos 99 textos contienen muchas maneras de presentar el concepto de variable.

Referencias bibliográficas

- Rosnick, P. (1980). “The presentation of the Concept of Variable and the Development of Problem Solving Skills: A Multi-Text Review”. ERIC#: ED295804. Education Resource Information Center.
- Matz M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. and Brown, J.S. (eds.) Intelligent Tutoring Systems, London. Academic Press.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Dormolen, J. Van (1986). Textual Analysis, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education*, pp. 141-171. Dordrecht: Reidel.
- Otte, M. (1986). What is a Text?, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education*, pp. 173-204. Dordrecht: Reidel Press.

Küchemann, D. (1987). Learning and Teaching Ratio: A Look at some Current Textbooks. En P. Ernest (Ed.) *Teaching and Learning Mathematics. Part 2. Perspectives 34*. School of Education. University of Exeter.

Freeman, D. & Porter, A. (1989). Do Textbooks dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? *American Educational Research Journal*, 26(3), 403-421.

Sanz, I. (1990). Comunicación, Lenguaje y Matemáticas. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Sevilla: Alfar.

García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum*, No 10-11, pp. 103-115.

Howson, G. (1995). *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts*. Vancouver: Pacific Educational

Trigueros Maria, y Ursini, Sonia (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática. Vol. 12, No. 2.* (27-48)