SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES: SECUENCIA DIDÁCTICA PARA SU ENSEÑANZA

María Rey Genicio, Clarisa Hernández, Silvia Porcinito
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Jujuy Argentina
tresm@imagine.com.ar
Campo de investigación: Pensamiento algebraico y gráfico Nivel: Medio

Resumen. *Esta propuesta surge de un Proyecto de Investigación que se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo, que adopta como metodología para la investigación la «Ingeniería Didáctica» y que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática. En este marco, se elaboró una secuencia de problemas que le permite al alumno construir los conceptos referidos a sistemas de ecuaciones lineales, en base a sus conocimientos previos sobre función lineal, rectas coincidentes, paralelas y oblicuas; armando un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto.*

Se han diseñado también una variedad de juegos que superan la ejercitación tradicional.

Palabras clave: secuencia didáctica, enseñanza, sistema de ecuaciones lineales

Consideraciones sobre la propuesta

El proyecto que da origen a esta Secuencia, se nutre teóricamente de las contribuciones de la Psicología del Aprendizaje y de la Didáctica. A continuación, nos referiremos con detalle a las contribuciones acerca de los procesos de aprendizaje, individuales y grupales, que provienen del marco psicológico. Los aportes de la Didáctica General y de la Matemática ("Ingeniería Didáctica" y "Teoría de las Situaciones"), que también sirven de fuente teórica, no se abordan aquí por estrictas razones de espacio, y pueden consultarse en las referencias bibliográficas y en otros trabajos de este Equipo de investigación.

Vale aclarar que es muy frecuente que los conocimientos acerca de cómo se aprende, construidos por la Psicología, se hayan traspolado al aula, aún cuando estos hayan sido fruto de investigaciones fuera de la escuela. Este no es un tema menor, ya que el aprendizaje en el aula se da en situación, o sea, en una institución con pautas determinadas, con prácticas docentes peculiares y con alumnos en particular. En este sentido, Bixio sostiene que algunas teorías de aprendizaje tienen un valor heurístico respecto a la problemática del aprendizaje pero que aún cuando sus aportes sean amplios y de calidad, eso no evita la necesidad de "*construir, a partir de las investigaciones pertinentes, las estrategias didacto-pedagógicas que la psicología no puede proporcionar. Por el contrario, nos obliga a ello*" (BIXIO, 1998, p. 14). Por ello la necesidad de que los conocimientos psicológicos se transformen en la práctica en estrategias didácticas, es decir, en el conjunto de acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica.

Hecha esta salvedad, desde nuestro Equipo, sustentamos la propuesta en los aportes de las Teorías Cognitivas, que en general entienden que el aprendizaje:

• requiere que el estudiante participe activamente en la construcción del conocimiento

• es mediado por los procesos de pensamiento, de comprensión, y de dotación de significados.

Esta concepción supone que se pida al alumno dialogar, participar, discutir una idea con los pares, formular hipótesis, y ensayar interpretaciones, ya que no es posible que se construyan conocimientos relevantes si no se participa activamente en su construcción, o si no se es capaz de iniciar. (Las ayudas específicas son intervenciones externas que le permiten la comprensión del conocimiento y pueden ser generadas por textos, herramientas, pares y, principalmente, por el docente). Acciones que permitan plantear las dificultades apropiadamente y recibir ayudas específicas. El concepto de ayuda contingente o ayuda justa (Bixio, 1998) es el que sostiene la actividad de enseñanza. Supone que cada alumno requiere una intervención pedagógica diferente en cada momento del proceso de aprender, ya que cada sujeto es único, aún cuando la construcción de dicho proceso en la escuela sea social y cultural. Esa mediación a través del docente es crucial en el proceso de aprendizaje para las teorías sociocognitivas. Así, teniendo como base fundamental del aprendizaje la actividad de los alumnos, la acción del docente es intervenir aportando ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales los estudiantes puedan explorar, observar, y reconstruir conocimientos.

En esos esquemas se va articulando la nueva información, sea ésta aportada por el docente, los textos, los materiales o los mismos alumnos, con las acciones cognitivas que realizan los sujetos.

En suma, de la Fuente Psicológica, recuperamos las siguientes posiciones cognitivas: *el constructivismo psicogenético*, por su explicación acerca de los procesos individuales de construcción que se suceden en el sujeto que aprende; *la teoría socio-histórica de Vigotsky*, por su papel en la comprensión de los procesos de mediación propios del aprendizaje y necesarios para determinar el papel de la enseñanza y la relación entre pares; y *los tipos de aprendizaje según Ausubel,* porque caracterizan especialmente los tipos de aprendizaje que acontecen en el aula.

Desde esta misma fuente surge el concepto de Interacción Socio–Cognitiva, que sostiene que los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo. De allí que la propuesta presentada promueva el trabajo en grupos, favoreciendo estos intercambios. Sin embargo hay que insistir en que el docente debe supervisar atentamente el trabajo en grupo, buscando actividades pertinentes, favorecedoras de una tarea en conjunto, facilitando los intercambios de tipo cognitivo (no social), recuperando lo trabajado en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos, para que lo construido sea, efectivamente, el conocimiento académico esperado. (Bixio, 1998)

Propuesta didáctica

La secuencia se apoya en el conocimiento previo del alumno sobre función lineal, rectas coincidentes, oblicuas y paralelas. Comienza con una actividad donde se pretende que el alumno se familiarice con la simbolización de un enunciado y recuerde la representación gráfica de una ecuación lineal. Continúa con una actividad donde se ve la necesidad de plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (S.D.E.L.D.I);

luego, mediante los siguientes problemas, se aborda su resolución por el método gráfico y por el de igualación:

1− Susana va de paseo a Córdoba y decide recorrer distintos lugares de la capital. En la Terminal de ómnibus le entregaron 2 folletos con propaganda de empresas que realizan viajes en auto. La empresa "RAPITAXI" promociona sus servicios rápidos y económicos diciendo que cobra la módica suma de $0,75 por km. recorrido más un adicional fijo de $ 2,5. En cambio la competencia de esta empresa, "ECOTAXI", ofrece servicios confiables pagando tan solo $ 1 por km. recorrido y con un costo inicial de $ 1.

a) Si Susana quiere realizar un viaje de 4 Km. ¿qué empresa le conviene utilizar y cuánto debe pagar? ¿y si el viaje es de 10 Km.? b) ¿Cuándo saldrá lo mismo utilizar cualquiera de las dos empresas y cuánto debe pagar? c) Encuentra una ecuación que exprese el precio que deberá pagar Susana si utiliza los servicios de "RAPITAXI" y "ECOTAXI" respectivamente. d) Representa en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos ambas ecuaciones. e) Valida las respuestas de los ítems a) y b)

2 – En el problema anterior la empresa "ECOTAXI" decide bajar sus costos y ofrece el viaje pagando únicamente $ 0,75 por kilómetro recorrido.

a) Encuentra una ecuación que exprese el precio que deberá pagar Susana si utiliza los servicios de ésta empresa con la nueva promoción. b) Representa en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos la ecuación obtenida en a) y la que expresa el precio por los servicios de "RAPITAXI". c) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer Susana para que salga lo mismo utilizar cualquiera de las dos empresas? ¿a qué se debe que esto suceda?

3 – En una bandeja hay alfajores y bombones. Juan el "sabioloco" observa que si se quitan de la bandeja 3 alfajores quedan entre ambos 15 piezas y si se sacan 2 alfajores más, quedan 13 piezas.

a) Escribe las ecuaciones que permiten simbolizar cada una de las situaciones observadas. b) Representa gráficamente dichas ecuaciones. c) El "sabioloco" concluye que hay 7 *alfajores y 11 bombones, pero luego de pensarlo detenidamente concluye que hay 8 alfajores y 10 bombones. ¿Ayuda a Juan a encontrar la solución correcta?*

La secuencia continua con una actividad cuya intención es que el alumno se familiarice con la resolución de un sistema por el método de igualación y gráfico y resignifique lo aprendido anteriormente acerca de la ecuación de la recta.

Los primeros pasos para resolver un sistema por el método de reducción o de sumas y restas se dan resolviendo los siguientes problemas**:**

1 – En una librería Juan pagó $32 por la compra de una lapicera y 4 cuadernos iguales. En la misma librería Susana compró los mismos artículos que Juan pero llevó una lapicera y 2 cuadernos. Si Susana pagó $18 ¿cuál es el precio de la lapicera y de cada cuaderno?

2 – Se está ensayando la preparación de un perfume usando esencia de rosa y esencia de jazmín. Cuando se mezcló el contenido de 3 ampollas de esencia de jazmín con el de 5 ampollas de esencia de rosa se obtuvo 54,75 ml. de perfume "floral fuerte”. Para obtener un perfume más suave se probó mezclar el contenido de las 3 ampollas de esencia de jazmín con 8 de esencia de rosa y se obtuvo 76,35 ml. de perfume "floral suave". A los efectos de comercializar ambos perfumes en envases del mismo contenido, se necesita conocer la capacidad, en ml., de cada tipo de ampolla.

Para obtener ecuaciones equivalentes se plantea el siguiente problema. Al hacer la puesta en común, el docente debe hacer explicito el conocimiento implícito del estudiante, para ello deberá institucionalizar las propiedades aplicadas.

1 – Susana compró 3 kg. de azúcar y 5 kg. de yerba mate y pagó $ 34. En el mismo negocio Juan compró los mismos productos que Susana pero llevó 1 kg. de azúcar y 2 kg. de yerba mate por lo que pagó $13. Con esta información completa los siguientes enunciados y luego simbolízalos.

a) 3 kg. de azúcar y 6 kg. de yerba mate cuestan ……………………………………….

b) 4 kg. de azúcar y 7 kg. de yerba mate cuestan ……………………………………….

c) 2 kg. de azúcar y 3 kg. de yerba mate cuestan …………………………………….

d) ½ kg. de azúcar y 1 kg. de yerba mate cuestan …………………………………….

e) 1 kg. de yerba mate cuesta …………………………………….

f) 1 kg. de azúcar cuesta …………………………………….

g) Con las respuestas obtenidas en e) y f) comprueba que se verifica el enunciado del problema y la respuesta dada en los ítems a). . . d).

El conocimiento logrado sobre la obtención de ecuaciones equivalentes se reinvierte en la siguiente actividad, donde la variable didáctica es la variación en los coeficientes de las variables. Al finalizar el ejercicio 3, se debe institucionalizar el método de reducción y al finalizar el 4, cuándo el sistema tiene solución única, cuándo no tiene solución y cuándo tiene infinitas soluciones. Se debe establecer la vinculación con lo visto anteriormente sobre solución de un sistema, ecuación de la recta y representación gráfica

1− Un grupo de alumnos está preparando los festejos del día del amigo. Lidia puso en una bandeja el contenido de un paquete de galletitas de chocolate y el de tres paquetes de galletitas de vainilla, en cambio Alicia puso en otra bandeja el contenido de dos paquetes de galletitas de chocolate y el de dos paquetes de galletitas de vainilla. Si en la bandeja que preparó Lidia hay 57 galletitas en total y en la que preparó Alicia hay 54 galletitas ¿cuántas galletitas tiene cada paquete?

2 – Una casa de regalos tiene preparados moños de dos tamaños distintos. Si sabes que tres moños chicos y dos grandes ocupan 4 metros de cinta y que dos chicos y ocho grandes ocupan 10 metros de cinta ¿cuántos metros de cinta ocupa cada tipo de moño?

3 – Si cinco personas van un al cine y tres van al teatro gastarían en entradas $88, mientras que si tres personas fueran al cine y dos al teatro gastarían $56. Averigua cuánto cuesta la entrada al cine y cuánto la entrada al teatro.

4 a) Para el desfile de carrozas, en la semana del estudiante, se confeccionan una cierta cantidad de flores iguales de color rojo y otra cierta cantidad de flores iguales de color *blanco (las flores rojas son de tamaño distinto al de las blancas). Miguel le dice a sus compañeros que él recopiló datos de años anteriores sobre la cantidad de flores que se pueden confeccionar con cada pliego de papel. Según afirma Miguel, 9 pliegos de papel crepé blanco y 6 pliegos de papel rojo, permiten confeccionar en total 345 flores y 3 pliegos de papel crepé blanco y 2 pliegos de papel rojo, permiten confeccionar en total 105 flores. Luego de conocer esta información, Carlos le dice a Miguel que los datos que obtuvo no pueden ser simultáneamente correctos. Utiliza el método de sumas y restas para determinar si lo afirmado por Carlos es cierto.*

b) Después de revisar sus estadísticas, Miguel dice que en realidad se equivocó al leer y que con 9 pliegos de papel crepé blanco y 6 pliegos de papel rojo se confeccionan en total 345 flores, pero que con 3 pliegos de papel crepé blanco y 2 pliegos de papel rojo se confeccionan 115 flores en total. Con esta nueva información Carlos le dice a Miguel que si quiere determinar cuántas flores se pueden hacer con cada tipo de pliego de papel, necesita más información. Utiliza el método de sumas y restas para determinar si lo afirmado ahora por Carlos es cierto.

c) Miguel, bastante abatido, revisa sus anotaciones y dice ¡Eureka! encontré un error en mis cálculos, la información correcta es que con 9 pliegos de papel crepé blanco y 6 pliegos de papel rojo se confeccionan en total 345 flores y con 3 pliegos de papel crepé blanco y 5 pliegos de papel rojo se confeccionan en total 175 flores. Ahora Carlos felicita a Miguel porque los datos son consistentes. Ayuda a Carlos a determinar cuántas flores se pueden hacer con 1 pliego de papel de cada color.

Con los conocimientos logrados a partir de la actividad anterior, se le pide al alumno que resuelva el sistema: $ax + cy = e$; $bx + dy = f$. Aquí se ve la necesidad de sistematizar las operaciones para determinar el valor de las variables; es en este momento donde el docente presenta la noción de determinante, su forma de calcularlo y la notación usada.

Para introducir el método de sustitución, se plantea el siguiente problema:

Beatriz y Amalia viajan, en auto, a una localidad de la Provincia de Tucumán. A fin de no cansarse, maneja un tramo cada una. Cuando llegan a destino, el cuentakilómetros marca que recorrieron 300 km. Sabiendo que Beatriz manejó el doble de km. que Amalia, a) Escribe el sistema de ecuaciones que simboliza la situación planteada. b) Sin usar los métodos vistos encuentra otra estrategia para determinar la cantidad de kilómetros que manejó Amalia y la cantidad de kilómetros que manejó Beatriz.

La última actividad tiene por objetivo que el alumno reinvierta todo lo aprendido sobre sistemas de ecuaciones lineales. Se incluye una gran variedad de ejercicios para que el docente, según el grupo de alumnos, seleccione aquellos que considere conveniente. Algunos ejercicios contienen datos innecesarios a fin de que el alumno sepa hacer la distinción entre los datos necesarios y los irrelevantes.

Finalmente se presenta una serie de juegos, cuya finalidad es practicar y afianzar los conceptos vistos. De los juegos propuestos, por razones de espacio, solo se incluye uno.

Rueda de sistemas

Bases del juego:

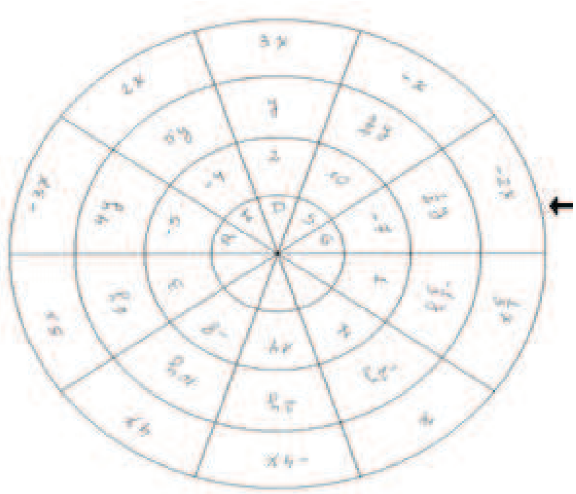
El objetivo del juego es resolver sistemas de ecuaciones y en él participan cuatro alumnos, uno de los cuales es el presidente. El presidente va rotando en cada tirada, el mismo podría ser el que está a la derecha del que tira. Cada alumno, cuando sea su turno, hace girar las cuatro ruedas y resuelve el sistema que se forma de la siguiente forma**:** una de las ecuaciones que se toma es la que indica la flecha, la misma se forma sumando la expresión que figura en el primer círculo con la que aparece en el segundo e igualando a la que está en el tercero. La otra ecuación es la que se forma tomando las expresiones en el sector opuesto. El método que se utiliza para resolver es el indicado en el cuarto círculo. El presidente es el que corrobora que la respuesta y el método usado son correctos. Para ello tiene 2 minutos. Si antes de que el presidente de un veredicto (respuesta correcta o no) alguno de los otros alumnos detecta que la respuesta no es correcta, se le adjudica 2 puntos.

Si el sistema está bien resuelto, se le otorga un puntaje que depende del tiempo que demore en resolverlo.

Si la respuesta no es correcta se le baja 3 puntos.

Gana el que mayor puntaje tenga al finalizar el tiempo estipulado para el juego.

Tiempo (min.)	Puntaje
$t \leq 2$	6
$2 < t \leq 4$	4
$4 < t \leq 6$	2
$t > 6$	0



Conclusión

Las actividades diseñadas responden a las "condiciones del buen problema": los enunciados tienen sentido en relación con conocimientos previos, todos los alumnos están en condiciones de dar al menos alguna respuesta para el problema inicial, admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (numérico, algebraico, funcional y gráfico). En toda la secuencia se enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera que el conocimiento a aprender es el único eficaz para resolverlos; al mismo tiempo las variables didácticas se hacen variar para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad.

En la implementación de este diseño los alumnos se comprometieron e implicaron en la tarea, valorando esto por permitirles dar significatividad al conocimiento

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1999). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. D. F., México**:** Grupo Editorial Iberoamérica.

Ausubel, David y otros. (1988) *Psicología Educativa.* D.F. México: Trillas.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Buenos Aires, Argentina**:** Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba, Argentina**:** FAMAF.

Camuyrano, M., Net, G. y Aragón, M. (2000). *Matemática I.* Buenos Aires, Argentina**:** Estrada

Castorina y Otros, (1998). *Psicología Genética*. Buenos Aires, Argentina: Miño y Dávila.

Castorina, José A. Ferreiro, Emilia y otros. (1997) *Piaget-Vigotsky: contribuciones para replantear el debate.* Bs. As., Argentina: Paidós Educador.

Coll, César (1991) *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Madrid. España: Paidós.

Davini, M. (1997). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía*. Buenos Aires, Argentina**:** Piados.

Garton y Pratt. (1991) *Aprendizaje y proceso de alfabetización*. Bs. As., Argentina: Paidós.

Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A. (1991). *Matemáticas, Bachillerato 1.* Madrid, España**:** Anaya.

Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R. y Diaz, B. (1999). *Matemática I*. Buenos Aires, Argentina**:** Santillana.

Larson, R.; Hostetler, R. y Neptuno, C. (2000). *Algebra Intermedia* (2ª ed.). D.F., México: McGraw–Hill.

Rodríguez, M. y Martínez, M. (1998). *Matemática 9.* Santiago, Chile: McGraw–Hill.

Vygotsky Lev. (1988) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona España: Grijalbo.