DIFERENTES MARCOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR DEMOSTRAR

Nora Ferreira, Estela Rechimont, Carlos Parodi
Universidad Nacional de La Pampa Argentina
francis@cpenet.com.ar, rechimont@exactas.unlpam.edu.ar

Campo de investigación: Resolución de problemas. Pensamiento lógico Nivel: Superior

Resumen. *La demostración es uno de los ejes de la actividad matemática y muchos estudios se refieren al tipo de problemas que pudieron dar origen a la evolución de este concepto. Para abordar la investigación en torno a la utilización de procesos de demostración por parte de los estudiantes, se trabajó con un grupo de segundo año de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Se presentaron a los alumnos, dos problemas que requerían, aunque no explícitamente, plantear una conjetura y demostrarla. Uno de los problemas se refiere a sucesiones y el otro plantea una situación geométrica. Tal como podía preverse, a raíz del análisis histórico, el problema asociado a una formulación geométrica desencadenó procesos de demostración que no surgieron en el trabajo con el problema algebraico.*

Palabras clave: demostración, problemas, experiencia áulica

Introducción

La demostración es uno de los ejes de la actividad matemática y, en los últimos años, la enseñanza de la Demostración ha ocupado un lugar muy importante en las investigaciones de los especialistas en didáctica de la matemática. Por otro lado, también se ha puesto énfasis en la Resolución de Problemas como motor de la enseñanza, no sólo de la matemática, ya que éstos han estimulado la investigación y el progreso en muchas y variadas disciplinas.

Sin embargo, consideramos que llevar a cabo una tarea que refleje la actividad del científico y que involucre actividades de argumentación, prueba o demostración implica un trabajo a largo plazo, centrado en el planteo de problemas abiertos a través de los cuales el estudiante pueda no sólo adquirir conocimientos sino específicamente entrenarse en una actitud reflexiva y dispuesta a formular conjeturas y discutir su validez.

Los términos Prueba, Demostración, Justificación, generalmente se utilizan como sinónimos, sin embargo, en el marco de distintas investigaciones, se detectan diferencias entre ellos que, de alguna manera, ordenan la evolución del rigor involucrado en tales procesos.

La demostración, como contenido matemático, está presente en las propuestas curriculares del Ministerio de Educación de la Provincia de La Pampa, Argentina, tal como consta en varios parágrafos de tales documentos, sin embargo, su consideración como objeto de estudio presenta algunas dificultades. Para aportar a resolver el problema de su enseñanza, creemos necesario analizar la génesis de la demostración dentro de la misma matemática y pensar en la posibilidad de recrear en clase alguna de las condiciones que dieron origen a ese desarrollo de la ciencia.

Arsac (1987) atribuye el origen de la demostración, o más aún la transformación de las matemáticas en ciencia hipotético-deductiva, a la sociedad griega. Asocia estos procesos a la resolución del problema de la irracionalidad de la diagonal del cuadrado, sin embargo no descarta la existencia de un trabajo previo en lo que Balacheff (2000) clasifica como "pruebas", en las matemáticas de Egipto o la India.

> *Como ya dijimos, es muy inverosímil que solo la percepción del problema haya conducido inmediatamente a su solución. La elaboración de la solución definitiva debió ser precedida de muchos tanteos, hacia el siglo V a.C. En la medida en que esos tanteos representan etapas en el camino del rigor, nos interesan también. (Arsac 1987, p. 292)*

La construcción histórica de la demostración y el análisis didáctico de dos experiencias a partir de las cuales se desencadenan procesos de demostración nos permitirá proponer actividades interesantes para trabajar en el aula tales procedimientos.

Perspectiva Histórica

En general, matemáticos e historiadores coinciden en ubicar el origen de la demostración en Grecia, en el siglo V antes de Cristo como consecuencia directa de la argumentación, ampliamente practicada en los debates públicos y en la vida política de la antigua Grecia.

Seguramente no fue por azar que la razón surgió en Grecia como una consecuencia de esta forma tan original de instituciones políticas que llamamos la ciudad. Con la ciudad, y por primera vez en la historia del hombre, el grupo humano considera que sus asuntos comunes no pueden decidirse sin un debate público y contradictorio, abierto a todos y donde los discursos argumentados se oponen unos a otros. Si el pensamiento racional apareció en las ciudades griegas de Asia menor como Mileto, es porque las reglas de juego políticas en el marco de la ciudad -debate público, argumentado, libremente contradictorio- se habían convertido en las reglas del juego intelectual (Vernant 1979, en Arsac 1987, p. 270)

La gran diferencia entre la matemática pre-helénica y la nueva matemática es una visión totalizadora, en esta última dejan de reconocerse las validaciones no sistematizadas, a partir de figuras u otro tipo de reconocimiento implícito y comienzan a exhibirse claramente las hipótesis y las reglas de deducción y a generalizarse los resultados.

En la geometría, en particular, dice Arsac: *.en la historia como en la enseñanza, el problema es el paso de un estadio en el que la figura sirve de herramienta de prueba a aquel en el que la geometría se convierte en el arte de "razonamientos exactos sobre figuras inexactas"* (Arsac 1987, p. 278)

Desde el punto de vista didáctico, se plantea la construcción y asimilación de un concepto a partir de la necesidad de utilización del mismo como herramienta para solucionar un problema. Ahora bien, qué tipo de problema pudo dar origen a la evolución de una técnica como la demostración, ha sido motivo de variados estudios, principalmente en el área de la epistemología. La discusión se ha centrado en los problemas de irracionalidad e inconmensurabilidad, básicamente sobre las diagonales del cuadrado y del pentágono regular, ya que se los considera problemas que pueden plantearse en términos de las matemáticas pitagóricas y cuya solución necesita de la existencia de un nuevo tipo de números. *En el marco de una geometría que sin duda todavía utiliza ampliamente la referencia a la figura, el fenómeno de la irracionalidad puede ser descubierto empleando una técnica relativamente simple; se manifiesta entonces, no como un descubrimiento sorprendente, sino más bien como un nudo de contradicciones, ya que el procedimiento matemático lleva a "probar" la no existencia de ciertas relaciones entre segmentos, contrariamente a las ideas recibidas y a la doctrina pitagórica, y que este método de "prueba" se apoya a su vez en la hipótesis de la existencia universal de relaciones racionales que lleva a negar.* (Arsac 1987, p. 288)

Como para reforzar las ideas acerca de los orígenes de las demostraciones formales, cabe señalar que el primer indicio de razonamientos por absurdo se da precisamente en el trabajo sobre la diagonal del cuadrado y, a partir de allí, es utilizado de manera incesante en matemática, y muy especialmente por Euclides en sus Elementos.

Prueba y Demostración

En algunos textos de matemática, y en muchas expresiones de la vida cotidiana, los verbos explicar, probar y demostrar, se consideran sinónimos. Sin embargo, cada uno de ellos apunta a un nivel de actividad diferente por parte de los alumnos.

Para clarificar el uso del vocabulario y enmarcar nuestras reflexiones en torno a la evolución histórica y el tratamiento didáctico de estos procesos consideramos la clasificación propuesta por Balacheff (2000).

La explicación se ubica al nivel del locutor y se expresa en un discurso generalmente oral, donde éste expone lo que, en su racionalidad, garantiza la validez de una proposición dada. En este discurso, el locutor pretende esclarecer los motivos que dan origen a su descubrimiento y convencer a los espectadores de la legitimidad de la proposición que, personalmente, ya ha adquirido.

En el momento en que una explicación ha sido socialmente reconocida y aceptada, en la clasificación de referencia, se denomina prueba. En este caso, se considera la explicación despersonalizada y descontextualizada. *El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un **proceso social** por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptado por una comunidad. Esta posición no es definitiva; con el tiempo puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya. Por otro lado, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra.* (Balacheff 2000, p. 12)

Finalmente, se caracteriza el tipo particular de prueba utilizada habitualmente en matemática, es decir al conjunto de enunciados lógicamente encadenados de acuerdo a reglas bien definidas que llamamos *demostración*. *Lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso es su forma estrictamente codificada*. *Ciertas etapas de la demostración pueden no estar explícitas; el descubrirlas depende del lector.*

Por otro lado, se distingue también el término *razonamiento* ubicándolo en un plano personal, como una actividad intelectual no completamente explícita del individuo que manipula la información dada o adquirida, para producir una nueva información.

La Experiencia

Para abordar la investigación en torno a la utilización de procesos de demostración por parte de los estudiantes, se trabajó con un grupo de alumnos del Profesorado en Matemática que cursan el segundo año de la carrera en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estos alumnos han aprobado asignaturas básicas en las cuales se desarrollan distinto tipo de demostraciones, por ejemplo razonamientos por el absurdo, demostraciones por inducción, deducciones utilizando axiomas o resultados previos, etc.

Se presentaron a los alumnos, en distintos momentos, dos problemas que requerían, aunque no explícitamente, hallar y presentar una demostración. En un primer momento, se expresaron respuestas y opiniones, se formularon conjeturas pero no se intentó una validación de las mismas. A partir de las intervenciones docentes, apareció la necesidad de hallar algún tipo de justificación.

Primer Problema:

Se presentó la sucesión de Fibonacci a través de algunas situaciones concretas y a continuación se solicitó:

a) Escriba por lo menos los treinta primeros términos de la sucesión de Fibonacci
b) ¿Cuáles son pares?,
c) ¿Cuáles son múltiplos de 3?, ¿Qué lugar ocupan en la sucesión?
d) Analice la sucesión de Fibonacci, busque e indique regularidades y propiedades de sus términos.

En la resolución de este problema se detectaron aspectos diferentes, por un lado, los estudiantes pudieron conjeturar acerca de algunas propiedades de la sucesión, sin embargo no se involucraron en procesos de validación de tales conjeturas. Por otro lado, los estudiantes revelaron dificultades a la hora de expresar una conjetura en un lenguaje simbólico que les resultara familiar a la hora de intentar una demostración.

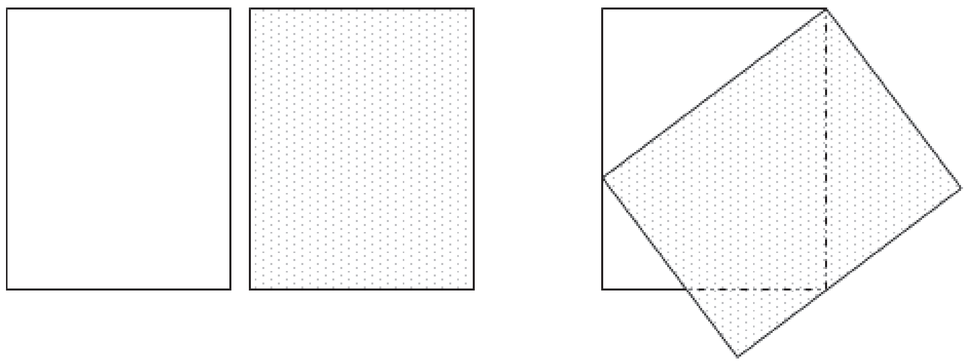
Este inconveniente se manifestó claramente al trabajar conjuntamente con el docente, puesto que, empujados por los requerimientos de éste, comenzaron a proponerse y mejorarse expresiones algebraicas para los enunciados coloquiales. Así, la proposición "*los términos de la sucesión de Fibonacci cuyo orden es múltiplo de tres son pares*", se pudo expresar como: $a_{3n} = 2 \cdot k$ con $n, k \in N$, y su demostración se pudo realizar por inducción sobre *n*.

Se suponía que la situación propuesta se convertiría en el motor de desarrollo de procesos de validación implícitos en la resolución del problema. Sin embargo, los estudiantes no asumieron la necesidad de justificar sus conjeturas sino hasta que se algebrizó, en trabajo conjunto con el docente, una de ellas y se notó la semejanza con algunos enunciados demostrados por inducción en un curso previo de álgebra elemental.

Puestos en alerta los estudiantes acerca de la necesidad de justificar todas las conjeturas que surgen en una resolución, los restantes items se transformaron inmediatamente en ejercicios del tipo “demostrar que”, con lo cual se condicionaron las respuestas producidas.

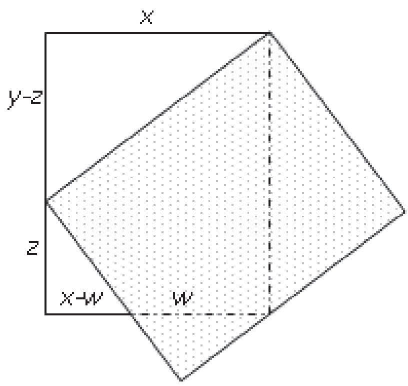
Segundo problema:

Consideremos dos hojas de papel del mismo tamaño. Deslicemos una sobre otra como muestra la figura 1. La parte oculta de la hoja de abajo, ¿es más grande o más chica que la parte que se ve?



Resoluciones de los estudiantes

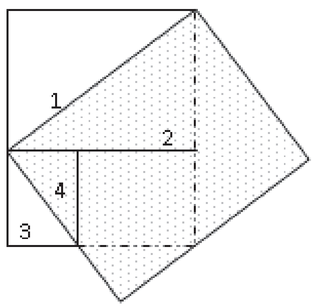
1)



Determinan el área oculta calculando la diferencia entre el área del rectángulo y el área de los dos triángulos visibles. $A = xy - \frac{x(y-z)}{2} - \frac{z(x-w)}{2}$.

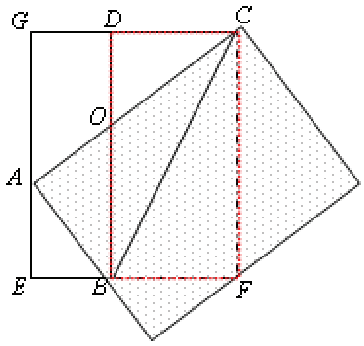
Desarrollando: $A = xy - \frac{xy}{2} + \frac{xz}{2} - \frac{zx}{2} + \frac{zw}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{zw}{2}$, obtienen que "*la parte oculta es la mitad del rectángulo más algo positivo*". Ese conclusión los lleva a afirmar que es mayor la porción oculta que la que está a la vista.

2)



A partir del análisis de la figura y considerando la invariancia de áreas por simetría, afirmaron que: "*Como el triángulo* 1 *es congruente al* 2 *y el triángulo* 3 *lo es al* 4*, resulta evidente que el área de la región oculta es mayor que el área de la parte visible*".

4)



En este caso el alumno realizó el siguiente razonamiento: los triángulos *ABC* y *BCD* son congruentes puesto que ambos son rectángulos y tienen un cateto y la hipotenusa congruentes. Los triángulos *ABO* y *CDO* también lo son pues tienen todos los ángulos y un lado congruentes. Puesto que el segmento *AB* es mayor que el *EB* podemos afirmar que el área del rectángulo *BFCD* es mayor que el área del rectángulo *EBDG*.

Como el área del rectángulo *BFCD* coincide con el área de la región oculta queda probado que el área oculta es mayor que el área visible.

Consideraciones Finales

Luego del análisis de los procesos de prueba y demostración, desde la historia, se eligieron los dos problemas pues nos parecieron adecuados para promover, en los estudiantes, validaciones desde diferentes marcos y utilizando las herramientas convenientes en cada caso.

A priori el equipo de investigación anticipaba que la resolución del primer problema planteado generaría el desarrollo de procesos de validación en un marco algebraico- 58 numérico. Sin embargo, los alumnos no logran bosquejar el comienzo de una prueba y la producción obtenida luego de las intervenciones docentes, parece indicar que las demostraciones surgen, principalmente, como requerimiento del enunciado.

Resultó evidente que los estudiantes producen fundamentalmente validaciones en un registro geométrico y que la utilización de herramientas algebraicas no surge espontáneamente, aún cuando dichas herramientas hayan sido consideradas explícitamente en asignaturas anteriores.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (1995). *Viaje al país de los Rectángulos*. Buenos Aires, Argentina: Red Olímpica.

Arsac, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. *Recherches en Didactique des Mathématique*.*8* (3), 267-312.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Bogotá, Colombia: Una Empresa docente, Universidad de los Andes.

Boyer, C. (1968). *Historia de la Matemática*. Nueva York, EEUU: Jhon Wiley and Sons. New York.

Ribnicov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú, Rusia: Mir.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.