

ÁLGEBRA DE FUNCIONES TOMANDO COMO BASE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Julio Moisés Sánchez Barrera
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM
juliomoisessb@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Gráfica y funciones

México

Nivel: Superior

Resumen. *El diseño tomó como base la teoría de “Situaciones Didácticas” de Guy Brousseau, quien sitúa a los estudiantes frente a un conjunto de actividades, pensadas de tal manera que el estudiante pueda tener una estrategia inicial con la ayuda de sus conocimientos previos, pero muy pronto, esta estrategia se muestra ineficaz por lo que se ve obligado a realizar los ajustes necesarios para obtener la respuesta óptima. De este modo se enfrenta a los estudiantes ante una situación que evoluciona de tal manera que el conocimiento por adquirir se aprenda y sea un medio eficaz para lograr el objetivo didáctico.*

El presente trabajo fue aplicado en un taller en RELME 21, en los estudiantes del propedéutico de la Maestría en Administración y de las Licenciaturas de Administración y Contaduría de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM.

Palabras clave: álgebra de funciones, situación didáctica

Objetivo

Mejorar el aprendizaje en los estudiantes cuando se enseñe el tema de álgebra de funciones, tomando como base las representaciones de las funciones en su forma sagital en conjuntos y poder articularlo en las diferentes representaciones semióticas: gráfica, tabular y analítica con aplicaciones a las áreas Económico-Administrativas.

Marco Teórico

Esté trabajo esta basado en la Ingeniería Didáctica, la cual esta basado principalmente en dos teorías: La Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1998), que son los referentes de la Ingeniería Didáctica.

La Ingeniería Didáctica surge a principios de los años ochentas, en el seno de la Didáctica francesa de la matemática, según Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias, de clase, diseñadas, organizadas, y articuladas coherentemente por un “profesor ingeniero”, para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo específico de alumnos. Por lo tanto se considera que la Ingeniería Didáctica es un “producto” que resulta de un

análisis preliminar, donde se tienen en cuenta las dimensiones cognitivas, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir y de un análisis a priori en el cual se decide sobre que variables didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuará, en este caso se incorpora una cuarta componente, que es la socio-cultural, que es ponerlo en escena.

Brousseau (1986) nos habla de una “génesis ficticia” de los saberes puestos en juego en el aula con el propósito de facilitar su enseñanza, en la cual se aíslan las nociones y propiedades de las actividades que les dieron origen, sentido, motivo, y utilización. Considera a su vez, la necesidad de retomar e incorporar en el discurso escolar, la historia de los saberes, esto es, indagar sobre las dificultades y preguntas que provocaron su aparición como conceptos necesarios y su evolución y uso de nuevos problemas.

Según Chevallard (1998), el conocimiento matemático no llega al aula tal y como es producido, sino que sufre un proceso que se ha denominado transposición didáctica. El “saber erudito” pasa a ser un “saber a enseñar”, luego de ser validado por una “noosfera” que le confiere el status de conocimiento a ser aprobado en la escuela.

Brousseau (1986) desarrolla su teoría de las situaciones didácticas reformulando ciertas ideas generadas por Piaget, considera que un individuo aprende en la medida en que construye o resignifica un concepto, incorporándolo a su estructura cognitiva, por medio de un proceso de asimilación y acomodación, a un medio que es factor de desequilibrios y dificultades en su proceso de construcción del conocimiento. Se considera entonces, que el conocimiento es una construcción personal, en tanto que el saber proviene de una elaboración cultural, siendo motivo de interés la génesis, en cuanto a su historia del saber.

El conocimiento proviene en buena parte del hecho que el alumno lo adquiera en su adaptación a situaciones didácticas que le son propuestas, en este sentido, aparece la idea de “devolución”, acto seguido por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepte él mismo las consecuencias de tal transferencia. La devolución es la esencia del acto de comunicación entre el profesor y el alumno frente a un objeto de conocimiento, produciéndose la misma en ambos sentidos.

El docente debe proponer al alumno, una situación que le permita dotar al conocimiento que se desea impartir, la situación planteada debe tener por objeto que el alumno interactúe con el

saber, es decir formule, pruebe y construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías que intercambie con otros. La situación debe ser fuente de aprendizaje, en ciertas ocasiones también debe ser criterio de validación de las estrategias puestas en juego.

Se considera que el alumno se ha apropiado del conocimiento, cuando es capaz de utilizarlo fuera del contexto de enseñanza, y en momentos donde no haya indicación intencional, denominándose a éstos “situaciones no didácticas”, están regidas por el contrato didáctico, es decir, por las obligaciones implícitas que se establecen entre los actores del sistema didáctico, esto es la tríada docente-alumno-conocimiento. Define “situaciones didácticas”, como aquéllas en las cuales el profesor se aparta del escenario dejando que el alumno viva esta situación como investigador de un problema matemático, independientemente del sistema educativo. Brousseau, distingue diferentes tipos de situaciones a-didácticas, que son: acción, formulación y validación, así como institucionalización.

La situación a-didáctica de acción es aquélla donde el conocimiento se intercambia con una o varias personas a través de mensajes escritos u orales. Surgen nociones paramatemáticas, aquéllas que son utilizadas conscientemente como instrumentos útiles para el estudio de otros objetos, sin ser consideradas como objetos de estudio en sí mismas.

La situación a-didáctica de validación, es aquélla donde el conocimiento toma la forma de conocimiento totalmente admitido.

Por lo que surge el “contrato pedagógico”, apunta a reglamentar los cambios entre dos partes que toma, por un periodo limitado, un sistema de derechos y deberes recíprocos; supone el principio de un consentimiento mutuo de las partes ya que se funda sobre el enunciado de reglas de juego a las que cada uno debe libremente someterse.

Brousseau (1986) construye la noción de contrato didáctico, para explicar las relaciones de profesores y alumnos las cuales son condicionadas por un proyecto social exterior a ambos que se les impone y que se les da razón de ser, y difiere del contrato pedagógico en que es precedero, no establece como aquél, sino que evoluciona y se transforma a la par de los conocimientos puestos en juego.

El profesor de matemáticas tiene una dimensión social que se impone, le compete a él lograr el buen aprendizaje de cada alumno y asegurar la homogeneidad de la construcción de saberes y su

coherencia a nivel de toda la clase. Esta dimensión social da al profesor una posición particular, es el eslabón entre los saberes sociales y los saberes construidos en la clase. El contrato debe garantizar la devolución, de no ser así, se producen las rupturas y la búsqueda de nuevos contratos se torna importante.

Brousseau, retoma las ideas de Bachelard, y considera que los errores no son solo efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empiristas o conductistas, sino que son efecto de conocimiento anterior que habiendo tenido su interés y éxito, se revelan falsamente o simplemente inadaptados. Los errores de este tipo no son erráticos ni imprevisibles, se constituyen como obstáculos.

La idea de obstáculo epistemológico tiene a sustentarse, en ciertos casos, en tres categorías como: errores en la enseñanza, insuficiencias en el sujeto cognoscente y como intrínsecos al propio conocimiento. Por lo tanto, Brousseau habla de sendos obstáculos de origen didáctico, ontogénico y epistemológico.

La superación de un obstáculo implica el diseño de acciones racionales que se plasmen en una situación didáctica susceptible de evolucionar y de hacer evolucionar al alumno mediante un proceso dialéctico que permita confrontar las concepciones anteriores y recrear por lo tanto el nuevo conocimiento.

Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de la solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.). Juega entonces un papel esencial la elección y gestión de variables didácticas, tarea a cargo del profesor o del investigador, al igual que la identificación de los obstáculos inherentes al conocimiento.

Por lo tanto la Ingeniería Didáctica es un instrumento metodológico para la enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad de los procesos de enseñanza y sobre todo el de aprendizaje en situación escolar.

Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una ingeniería didáctica, a saber: análisis preliminar, diseño de la situación didáctica y su análisis a priori, experimentación y análisis de validación.

Análisis preliminar. Se analizan y determinan, desde una aproximación sistemática, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos, por lo cual se toma en consideración: el componente cognitiva, el componente didáctico y el componente socio-cultural.

Análisis a priori y diseño de la situación didáctica. En esta fase de la Ingeniería Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlan y se define la forma que las mismas serán gestionadas. Es una fase tanto prescriptiva como predictiva.

Experimentación. En esta etapa se procede a la “puesta en escena” de la situación diseñada, es decir, se implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

Análisis de validación: Consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina, en qué medida, las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

Se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

Antecedentes

Para iniciar con el diseño de esta actividad, se tomó en cuenta como tratan los libros de texto y de consulta el tema de álgebra de funciones y como lo tratan los maestros en clase. Nos damos cuenta que este tema se trata como si fuera álgebra básica y no se le da la importancia que tiene dicho tema, cuando se ve al tratar este tema de álgebra de funciones.

Por lo que esta propuesta toma en cuenta que el estudiante ya tiene como conocimientos previos el álgebra elemental y también la teoría de conjuntos y que además para explicarle lo que es el producto cartesiano, una relación y una función una gran cantidad de libros y de maestros en clase toma en cuenta la forma sagital de la teoría de conjuntos.

Como se menciona en el párrafo anterior si el álgebra de funciones nos ayuda para que el estudiante comprenda lo que es una relación y diferenciarla cuando una relación se considera función, por que dejarlo olvidado cuando se trata el tema de álgebra de funciones y solo en los libros se ve favorecido para explicar el producto composición, considerada la operación en la que el estudiante tiene mayor grado de dificultad para comprender.

Presentación del diseño

El diseño se compone de ocho actividades.

Actividad 1

Utilizando la teoría de conjuntos, en especial la notación sagital, se les pide a los participantes que realicen, la suma, resta, multiplicación y división de funciones.

Actividad 2

Se les proporcionaron a los participantes los conceptos para que los comprenda y aplique en las demás actividades del álgebra de funciones.

Actividad 3

Mediante una aplicación de suma de funciones obtenga la función de egresos, partiendo de la representación sagital de la función de gastos fijos y la función de gastos variables.

Actividad 4

Obtener la función de utilidad, partiendo de las representaciones sagitales de la función de ingresos y la función de egresos que se obtuvo de la actividad 3.

Actividad 5

Se pide que obtengan la función inversa de dos funciones, la primera no va a tener función inversa, ya que al tratar de obtenerla el resultado es una relación y la segunda si va a dar origen a una función inversa, con esto el participante comprenderá el por que solo las funciones biyectivas tienen función inversa.

Actividad 6

De una función de oferta, en la que los elementos del primer conjunto nos representan los artículos y los del segundo conjunto su precio estando en su forma sagital, se le pide obtener su función inversa.

Actividad 7

Se le pide obtener el producto composición $P \circ R = J$ y $R \circ P = L$, de dos funciones P y R representadas en su forma sagital, con lo anterior se comprueba que el producto composición no es conmutativo y además se verifica las condiciones que se tienen que cumplir para el producto composición.

Actividad 8

Realizando las actividades que tienen de aplicación, considerar a las funciones sagitales como el método tabular de pares ordenados para la construcción de su gráfica en el plano cartesiano de:

La grafica de la función de gastos fijos de la actividad 3

La gráfica de la función de gastos variables de la actividad 3

La gráfica de la función de egresos de la actividad 3.

La grafica de la función de ingresos de la actividad 4.

La gráfica de la función de utilidad que se obtuvo de la actividad 4.

La gráfica de la función de oferta de la actividad 6, la cual toma como eje de las abscisas (al primer conjunto que es el de los artículos).

La gráfica de la función inversa de la oferta, que se obtuvo de la actividad 6, la cual toma como eje de las abscisas al precio de los artículos.

La gráfica del producto composición $P \circ R = J$

Conclusiones

En el análisis a posteriori de la actividad se logró que los alumnos comprendieran el por qué y el para qué se ve el tema de álgebra de funciones, tanto en Licenciatura como en el propedéutico de la Maestría en Administración.

El alumno entiende que pasa con cada una de las operaciones del álgebra de funciones, ya que durante la actividad comprende su diferente articulación de representaciones semióticas: el de la forma sagital, la tabular, la gráfica y su aplicación en el área Económico-Administrativas. Y de esta manera puede aplicarlo en su vida profesional cuando sea necesario.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady R., Moreno L., y Gómez P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Buenos Aires: FAMAF

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. México: Pearson Educación.

Chevallard, Y., (1998). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y., Bosh M., y Gascón J. (2000). *Estudiar matemáticas el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: I.C.E. Universitat Barcelona y Editorial Horsori.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socio-epistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Rondero, C. (2006). Propuesta didáctica acerca de la articulación de saberes matemáticos. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 151-162). México DF: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.