# ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DE LEIBNIZ A RIEMANN

Agustín Grijalva Monteverde
Universidad de Sonora México
guty@gauss.mat.uson.mx
Campo de investigación: Epistemología Nivel: Superior

**Resumen.** *En el presente trabajo se plantea una concepción de contexto en el que un elemento fundamental es el constituido por los sistemas de prácticas desarrollados por quienes se enfrentan a situaciones problémicas relacionadas con la matemática. Enmarcado en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática propuesto por Godino, Batanero, Font [2008] y otros, se concibe que el lenguaje desarrollado por los sujetos que hacen matemáticas, sus procedimientos, las propiedades que atribuyen a los objetos, sus formas de organización y los conceptos que reconocen, determinan, en buena medida, la actividad matemática que desarrollan al enfrentar nuevas situaciones problémicas. Tomando como sujeto a la comunidad de expertos, en esta ocasión mostramos elementos en la dirección señalada, para la construcción del objeto matemático "integral de una función", siguiendo la línea de desarrollo iniciada por Leibniz a fines del Siglo XVII.*
**Palabras clave:** Contexto, objeto matemático, diferencial, integral

## Presentación y consideraciones generales

En los últimos años se han incrementado las investigaciones que se realizan en matemática educativa respecto al papel que juega el contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos, con respuestas diferentes dependiendo de la perspectiva teórica que se asuma.

Pero no existe una forma única de concebir al contexto. en algunos casos se hace referencia al ambiente extramatemático en el que se ubica un objeto, en otras se hace referencia a las restricciones matemáticas en el que se está tratando un problema, en otras al tipo de representación que se esté empleando, por señalar algunas de las más empleadas.

La perspectiva que asumimos en Grijalva [2008], es que, adicionalmente a aspectos como los anteriores, el contexto no podemos asumirlo como un ente preconcebido e inalterable, y está determinado primordialmente por las significaciones que los sujetos asignan a los objetos matemáticos, por medio de las cuales le dan sentido a las situaciones matemáticas que enfrentan y, consecuentemente, plantean soluciones acordes con dicha significación. Esto es, un aspecto fundamental del contexto está constituido por los significados personales con la que los sujetos que enfrentan una determinada situación problémica interpretan la situación misma.

Este tipo de observaciones nos ha llevado a desarrollar proyectos de investigación para estudiar las significaciones que los sujetos dan a los objetos matemáticos a partir de los sistemas de prácticas que han venido usando a lo largo de su formación escolar. Asimismo, nos formulamos cuestionamientos similares respecto a la forma en la cual las comunidades de expertos han ido construyendo el conocimiento matemático, centrando nuestra atención precisamente en los sistemas de prácticas desarrollados como parte del contexto en el cual ese conocimiento se construye.

En esta ocasión presentamos algunas ideas generales sobre los sistemas de prácticas desarrollados en la construcción del objeto matemático "integral de una función", en tres épocas o periodos que nos parecen claves en su desarrollo, partiendo de los trabajos de Leibniz, continuando con los de Euler y concluyendo con los de Cauchy- Riemann. La pretensión es mostrar precisamente cómo el contexto, entendido en el sentido que hemos indicado, jugó un papel de primera importancia en la construcción de la noción de integral, conformando diversas versiones, en diferentes momentos de la historia, de lo que podemos caracterizar como objeto institucional "integral de una función".

El estudio lo realizamos utilizando elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, propuesto por Godino, Batanero, Font y otros [2008]. Posados en esta teoría concebimos a un *objeto* como todo aquello de lo cual hablamos o nos referimos, ideal o material y, para caracterizar a los *objetos matemáticos*, nos apoyaremos en las prácticas desarrolladas por un sujeto determinado (persona o institución). Entendemos por *práctica matemática* a toda actividad o expresión empleada por un individuo o una comunidad para resolver una situación problémica, para validar su solución, comunicar sus resultados a otros o generalizarlos a otros problemas y situaciones. Cuando enfrentamos situaciones problémicas recurrimos no sólo a prácticas únicas o aisladas, sino a un conjunto o sistema de prácticas operativas y discursivas y a este *sistema de prácticas* lo concebimos como el significado de un objeto matemático. Si este sistema de prácticas es de un individuo en lo particular, decimos que se trata de un *significado personal*. Cuando un sistema de prácticas es compartido por una comunidad que analiza situaciones problémicas similares, decimos que se trata de un *significado institucional*.

Al resolver situaciones problémicas se ponen en juego sistemas de prácticas y se utilizan objetos como gráficas, desarrollos analíticos o algebraicos, concepciones, definiciones, proposiciones, etc. que hacen surgir nuevos objetos. A los objetos emergentes de un sistema de prácticas matemáticas los denominamos objetos matemáticos y, cuando los sistemas de prácticas son desarrollados por una persona en lo particular decimos que los objetos emergentes son *objetos personales* y si los sistemas de prácticas son compartidos al seno de una comunidad hablamos de *objetos institucionales*.

Los objetos que emergen de los sistemas de prácticas no sólo son conceptos, surgen también otros elementos que nos llevan a considerar seis tipos básicos de objetos matemáticos: *Situaciones problémicas, Lenguaje, Procedimiento, Conceptos, propiedades y Argumentaciones.*

En términos generales las situaciones problémicas determinan el contexto de trabajo y desarrollo de la actividad matemática, pero no es posible restringirlo a este elemento y en el caso de nuestra investigación estamos incluyendo a estos seis elementos como los componentes del contexto que se introducen para darle significado a los objetos matemáticos. La base para ello es que cuando se desarrolla una actividad matemática los sujetos se enfrentan no sólo a las situaciones problémicas sino también a un lenguaje previamente existente, se promueven procedimientos y argumentaciones, se parte de determinadas concepciones y de atribuir previamente propiedades a los objetos, que determinan en algún sentido la asignación de significados para los mismos.

## La integral de Leibniz (sumas)

Los primeros trabajos de Leibniz en el camino a la construcción de su teoría del cálculo se refieren a la manipulación de sucesiones finitas, donde, partiendo de una sucesión dada

$$A, B, C, D, E$$

y considerando la sucesión de diferencias

$$L, M, N, D$$

en la cual $L = B - A$, $M = C - B$ y así sucesivamente.

Entonces $L + M + N + D = (B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) = E - A$

de aquí que la suma de las diferencias consecutivas es igual a la diferencia del primero y último términos de la sucesión original.

Trabajando con las diferencias y sus sumas, obtuvo diversos resultados matemáticos que posteriormente extendió al caso de diferencias y sumas infinitas, como en el caso de lo que denominó "triángulo armónico", que mostramos a continuación:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}$$

Haciendo la suma de las cantidades que aparecen en las líneas oblicuas, las cuales son las diferencias de las líneas previas, Leibniz obtiene, con la consideración de que el último término decrece continuamente o "deviene en cero".

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+etc.=1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+etc.=\frac{1}{2}$$



Multiplicando por términos adecuados pudo ahora obtener resultados como los siguientes:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+etc.=2$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+etc.=\frac{3}{2}$$

Aquí podemos observar cómo las prácticas desarrolladas previamente por Leibniz para diferencias y sumas finitas son extrapoladas al caso de las sumas infinitas. Esto es, enfrentado ahora a una nueva situación problémica, la del caso infinito, Leibniz asumió que se podían aplicar las reglas de operación válidas para el caso finito, estableciendo con ello las propiedades del caso infinito, como es considerar que en el caso infinito se puede multiplicar término a término los elementos de una suma infinita y obtener como resultado la multiplicación de la suma original por el múltiplo considerado.

Una extrapolación aún más "audaz" la tenemos cuando caracterizó a las curvas como "polígonos infinito-angulares", en la que cada lado era la unión de dos puntos consecutivos de la curva. Estos segmentos eran, a su juicio, de "longitud inasignable" y, por analogía con las diferencias finitas, los denominó "diferenciales". Así, tomando una curva de longitud *s*, Leibniz denominó a cada segmento que unía dos puntos consecutivos con la notación *ds* y consideró que la suma de todas ellos daba como resultado *s*, lo cual escribió por medio de $\int ds = s$. Extendiendo este caso a sumas de figuras de "área inasignable" o de cuerpos geométricos de "volumen inasignable", estableció propiedades para las sumas, a partir de los resultados obtenidos en el caso de las sumas numéricas, creando con ello lo que hoy conocemos como cálculo diferencial e integral. Leibniz concebía en estos casos el tratamiento de las sumas como una extensión al caso geométrico de lo desarrollado anteriormente y, aunque era consciente de la aplicabilidad a la resolución del problema de la búsqueda de un procedimiento general para la cuadratura de las curvas, lo que resaltaba y enfatizaba eran las sumas, como puede verse en el caso del siguiente comunicado a Bernoulli en 1690, el cual reproducimos en una traducción libre de nuestra parte:

"Dejo a tu reflexión si no sería mejor en el futuro, por el bien de la uniformidad y la armonía, no sólo entre nosotros mismos sino para todo el campo de estudio, adoptar la terminología de suma en lugar de tus integrales. Entonces por ejemplo $\int y\,dx$ significaría la suma de todas las *y* multiplicadas por el correspondiente *dx*, o la suma de tales rectángulos. Solicito esto primordialmente porque de esta manera las sumas geométricas o cuadraturas, se corresponden mejor con las sumas o sumas de sucesiones (…) Debo confesar que encontré completamente este método considerando la reciprocidad de sumas y diferencias, y de ahí que mis consideraciones avanzaron de las sucesiones de números a las sucesiones de líneas u ordenadas". [Bos 1974: 21].

Por su parte Bernoulli, quien aceptó la sugerencia de Leibniz, planteó sus propias reflexiones señalando que:

"Además, en lo que toca a la terminología de la suma de diferenciales, gustosamente usaré en el futuro tu terminología de suma en lugar de nuestras integrales. Debía haberlo hecho así ya mucho antes si el término integral no fuera mucho más apropiado para ciertos geómetras, quienes me conocen como el inventor del término. Debía ser pensado por lo tanto que he obscurecido bastante el asunto, si ora indiqué la misma cosa con un término y ora con otro. Confieso que ciertamente la terminología no coincide con la cosa misma (el término mismo me lo sugirió cuando consideré a la parte infinitesimal de un todo o *integral*; no pensé nada más acerca de ello)." [Bos 1974: 21]

Conforme el cálculo se fue desarrollando, el problema de las cuadraturas al que Bernoulli hace referencia implícita para la creación del término "integral" cobró fuerza, por su aplicabilidad, más que el tratamiento de sumas, como procedimiento general al que Leibniz aludía, de tal suerte que hasta la actualidad es el que seguimos usando. Con ello reforzamos nuestra idea de que el mismo lenguaje creado y modificado en matemáticas es consecuencia de las situaciones problémicas al que corresponden y a los procedimientos, propiedades, argumentos y concepciones de quienes los proponen.

## La integral de Euler

Por la forma en que Leibniz desarrollo el cálculo diferencial e integral, las sumas y las diferencias eran vistas como simples operaciones inversas, lo cual estableció mediante lo que llamó "Principio Fundamental del Cálculo":

"Diferencias y sumas son las inversas una de otra, es decir, la suma de las diferencias de una serie es un término de la serie, y la diferencia de las sumas de una serie es un término de la serie" [Leibniz 1680: 142], lo cual escribió como $\int dx = x$ y $d\int x = x$.

Posteriormente Euler se propuso aplicar los elementos del cálculo a problemas físicos de movimiento, de hidráulica y otros, pero se enfrentaba al problema de extender dichos elementos a casos no geométricos, en el cual las entidades ya no eran "segmentos" sino variables físicas. Para lograrlo, Euler basó el desarrollo del cálculo sobre la noción de función en el cual las variables tenían un carácter generalizado, planteándose entonces el problema de establecer lo que ahora se entendería por "diferencial", esto es, por una cantidad "infinitamente pequeña". Después de una serie de consideraciones filosóficas, Euler concluye que las cantidades diferenciales o cantidades infinitamente pequeñas realmente son cero y, por lo tanto, susceptibles de tratarse como tales sin dar lugar a controversias. El siguiente pasaje es bastante ilustrativo de sus conclusiones:

"Dado que vamos a mostrar que una cantidad infinitamente pequeña es realmente cero, primero debemos conocer la objeción de por qué no siempre usamos el símbolo *0* para las cantidades infinitamente pequeñas, en lugar de algunos especiales. Puesto que todas las nadas son iguales, parece superfluo tener diferentes signos para designar una cantidad tal. Aunque dos ceros son iguales uno al otro, por lo que no hay diferencia entre ellos, sin embargo, tenemos dos maneras de compararlos, aritmética o geométrica, observemos los cocientes de las cantidades a ser comparadas con el fin de ver la diferencia. La razón aritmética entre dos ceros es una igualdad. Éste no es el caso con una razón geométrica. Esto podemos verlo fácilmente de la proporción geométrica $2:1=0:0$, en la cual el cuarto término es igual a *0*, como lo es el tercero. De la naturaleza de la proporción, dado que el primer término es el doble del segundo, es necesario que el tercero sea el doble del cuarto". [Euler 1755: 51].

Una vez establecida una forma de definir y concebir a las cantidades diferenciales para el caso de las variables generalizadas, la integral pudo ser tratada idénticamente a como se hacía en el caso de Leibniz y sus continuadores más inmediatos, asumiendo que la integral era la operación inversa de la diferenciación y aplicando el Principio Fundamental del Cálculo de Leibniz.. Así, al inicio del primero de sus libros sobre el cálculo integral dice [Euler 1768: 1]:

*“Definición 1.*

1. El Cálculo integral es el método para, a partir de una relación diferencial dada, encontrar la relación entre las mismas cantidades; y la operación que conduce a esto suele llamarse integración. [Euler 1768: 1].

A continuación, por medio de tres corolarios y dos escolios, extiende sus ideas respecto a la integral.

*Corolario 1.*

“2. Así pues, como el cálculo diferencial enseña a encontrar una relación diferencial a partir de una relación dada de cierta cantidad variable, el cálculo integral se dedica a investigar el método inverso.

*Corolario 2.*

3. Resulta claro que del mismo modo que en el Análisis perpetuo las operaciones binarias se oponen entre sí, como la sustracción a la adición, la división a la multiplicación, la extracción de raíces a la potenciación, así también, por razones semejantes, el cálculo integral es lo opuesto del cálculo diferencial”.

Consecuente con su concepción del cálculo para las variables generalizadas, de las que ahora el cálculo geométrico de Leibniz sólo era un caso particular más, importante pero uno más, en su libro de cálculo integral no incluye una sola gráfica y está destinado, primordialmente, a determinar la función integral para una gran cantidad de funciones o, como él decía, “fórmulas diferenciales”.

## La integral de Cauchy-Riemann

Ante las inconsistencias de fundamentación sobre la naturaleza de las cantidades diferenciales, los matemáticos estaban en búsqueda de nuevas formas de organizar el cálculo, con la conciencia de que su uso mostraba una potencia considerable para el estudio de muchos problemas tanto físicos como matemáticos, lo cual debía rescatarse.

Esta búsqueda cristalizó con la obra de Cauchy, en la cual el cálculo se organizó con base en las nociones de convergencia y continuidad, sustituyendo a las cantidades diferenciales por la derivada de una función y, retomando el establecimiento de la integral con el tratamiento de las sumas, se estableció su relación con la derivada, con la cual no existía una conexión inmediata.

Con la reorganización del cálculo el Principio Fundamental del Cálculo dejó de ser evidente y la relación entre derivada e integral se estableció por caminos más intrincados, hasta concluir con lo que ahora conocemos como teorema Fundamental del Cálculo.

La situación-problema fundamental que abordaron tanto Cauchy como Riemann, (quien refinó y extendió algunos de los resultados del primero), fue la fundamentación del cálculo sobre bases distintas a las de Leibniz y Euler, y en sus trabajos podemos percibir, una vez más, la creación de un lenguaje diferente, procedimientos diferentes, argumentos y concepciones diferentes a los de sus antecesores.

## Conclusiones

Con nuestro estudio histórico-epistemológico mostramos cómo, en dependencia de los significados preliminares puestos en juego y las nuevas situaciones problémicas que se les presentaron, Leibniz, Euler, Cauchy, Riemann y otros, interpretaron de diferente manera a objetos matemáticos que en apariencia eran los mismos, imprimiendo diferentes significados para las nociones fundamentales del cálculo y el análisis, desarrollando nuevas situaciones problémicas, nuevos lenguajes, procedimientos, atribuyendo diferentes propiedades a los objetos, nuevos conceptos y nuevas formas de argumentar.

## Referencias bibliográficas

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1-90.

Grijalva M., Agustín (2008). El Papel del Contexto en la Asignación de Significados a los Objetos Matemáticos, El Caso de la Integral de una Función. Tesis doctoral. CICATA, Unidad Legaria.

Euler, L. (1755). *Instititutiones Calculi Differentialis*. Traducido al inglés (2000) como Foundations of differential calculus. Rochester NY, USA: Springer-Verlag.

Euler, L. (1768). *Instititutionum Calculi Integralis. Volumen primum*. Tercera edición (1824). San Petersburgo, Rusia: *Impensis Academiae Imperialis Scientiarum*.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España.

Leibniz, G. W. (1680). *The elements of the new calculus for differences and sums, tangents and quadratures, maxima and minima, dimensions of lines, surfaces, and solids, and for other things that transcend other means of calculation*. The Royal Library of Hanover (1846). En The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz (1920). Chicago, USA, London, England: The Open Court Publishing Company.