EL MÉTODO DE LAS FRACCIONES CONTINUAS: APLICACIÓN AL DESARROLLO DE ALGORITMOS EFICIENTES DE CÁLCULO DE FUNCIONES DE BESSEL

Eugenio Hernández Vargas, María Jezabel Pérez Quiles
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Pinar del Rio (Cuba)
Instituto de Matemática Pura y Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia (España)
eugenio@mat.upr.edu.cu, jperezq@mat.upv.es

Resumen. En este trabajo se presentan los elementos necesarios sobre el método de las fracciones continuas para entender su uso en el desarrollo de algoritmos de computación eficientes para el cálculo de funciones de Bessel. El enfoque que se da a esta contribución es pedagógico, resaltando los aspectos docentes del método, y pretende ser enmarcada en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas y sus aplicaciones en física y/o ingeniería. En ella se ofrece un material didáctico dirigido a profesores de matemáticas que imparten docencia en carreras técnicas en cursos avanzados de cálculo numérico.

Palabras clave: fracciones continuas, funciones de Bessel

Abstract. In this work we present the necessary elements of the method of the continuous fractions to understand their use in the development of efficient calculation algorithms for the calculation of functions of Bessel. The focus that is given to this contribution is pedagogic, standing out the educational aspects of the method, and it seeks to be framed in the environment of the teaching of the mathematics and its applications in physics and/or engineering. So, we offer didactic material for professors of mathematics in technical careers in advanced courses of numeric calculus.

Key words: continuous fractions, functions of Bessel

Introducción

El trabajo docente que aquí presentamos versa sobre el desarrollo de algoritmos de computación eficientes para el cálculo de funciones de Bessel (FB). Los métodos usuales para su evaluación incorporan relaciones de normalización (Luke, 1975).

Los algoritmos para evaluar funciones de Bessel que se muestran en este trabajo se basan en los métodos desarrollados por Ratis y Fernández de Córdoba (Ratis y Fernández de Córdoba, 1993, pp. 381-388). Estos algoritmos no requieren re-evaluaciones a través de relaciones de normalización y evalúan tanto funciones de Bessel regulares (o de primera especie) como irregulares (o de segunda especie). Su método, además, mantiene la estabilidad de cada relación de recurrencia pues utiliza relaciones de recurrencia ascendentes para FB de segunda especie y relaciones de recurrencia descendentes (Miller, 1952) para FB de primera especie.

Estos algoritmos hacen uso de las relaciones de recurrencia ascendentes para generar FB irregulares e incorporan el método de las fracciones continuas para evaluar las FB regulares de alto orden. A partir de estos valores, se generan las FB irregulares aplicando relaciones de recurrencia descendentes.

Debido a esta estructura, en la que no se hace uso de ninguna relación de normalización, estos algoritmos se muestran especialmente útiles en la evaluación de FB de alto orden.

Algunos elementos sobre fracciones continuas

Durante los años 1650 y 1660 se desarrollaron una gran cantidad de métodos infinitos (Boyer, 1994), incluyendo el método de la fracción continua infinita para el cálculo de π. En realidad, los inicios de la teoría de fracciones continuas datan de principios del siglo XVI y tuvieron lugar en Italia, donde ya se expresaban raíces cuadradas de esta forma. Así, por ejemplo, si queremos despejar *x* de la ecuación $x^2+2x-1=0$ (o equivalentemente de $2=(1+x)^2 \leftrightarrow \sqrt{2}=1+x$) se tiene que como $x(x+2)=1$, entonces:

$$x=\frac{1}{x+2}, \quad \text{con lo que finalmente}$$

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}.$$

En la actualidad citaremos como referencias básicas a la teoría de las fracciones continuas fundamentalmente los trabajos de Wall (Wall, 1967) y Brezinski (Brezinski, 1990, 1991) y siguiendo la notación de (Wall, 1967) una fracción continua viene dada por:

$$f(x)=b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{b_4+\ldots}}}},$$

donde a_i, *i=1,2,…*, y b_j, *j=0, 1,2,…*, pueden ser a su vez funciones de la variable *x*.

Aplicación del método de las fracciones continuas a la evaluación de Funciones de Bessel

En esta sección vamos a presentar a modo de ejemplo de aplicación del método de las fracciones continuas para la evaluación de FB, el procedimiento para generar funciones de Bessel Esféricas (FBE) o de orden semi-entero tanto de primera como de segunda especie.

Seguimos la notación estándar de Abramowitz y Stegun (Abramowitz y Stegun, 1972) e introducimos las FBE de primera especie j_n y las FBE de segunda especie y_n como soluciones particulares de la ecuación diferencial

$$z^2w''(z)+2zw'(z)+(z^2-n(n+1))w(z)=0,\ n=0,\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Con el algoritmo que presentamos en esta sección se calculan simultáneamente las FBE de todos los órdenes por debajo de $N_{máx}$, i.e. se genera el conjunto:

$$BE(z)=\{\, j_n(z),\ y_n(z)\ ;\ n=0,1,2,\ldots,\ N_{máx}\,\}\ .$$

El método se ha organizado según los pasos siguientes:

1. Evaluamos todas las FBE de segunda clase {yn(z), n = 0,1,2,...Nmáx} teniendo en cuenta que conocemos los valores de y0(z)=-cos(z)/z e y1(z)=-sin(z)/z –cos(z)/z^2 con la fórmula de recurrencia ascendente

$$y_{n+1}(z)=\frac{(2n+1)}{z}y_n(z)-y_{n-1}(z).$$

2. Mediante el método de las fracciones continuas (Abramowwitz et al, 1972) evaluamos el cociente

$$H(z)\equiv\frac{j_{N_{máx}}(z)}{j_{N_{máx}-1}(z)}=\frac{j_{N_{máx}+\frac{1}{2}}(z)}{j_{N_{máx}-\frac{1}{2}}(z)}=$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{2N_{máx}}{z}+\cfrac{1}{\cfrac{2(N_{máx}+1)}{z}+\cfrac{1}{\cfrac{2(N_{máx}+2)}{z}+\cfrac{1}{\cfrac{2(N_{máx}+3)}{z}+\ldots}}}}.$$

Este método se programa en el código de Ratis y Fernández de Córdoba usando el algoritmo de Steed (Barnett, Feng, Steed y Goldfarb, 1974, pp. 377-395).

3. Calculamos las FBE de primera especie jNmáx(z) y jNmáx-1(z) teniendo en cuenta que conocemos los valores de yNmáx(z) y yNmáx-1(z), el cociente H(z) y el valor del Wronskiano de las FBE

$$W\{j_{N_{máx}}(z),y_{N_{máx}}(z)\}\equiv$$
$$\equiv j_{N_{máx}}(z)y_{N_{máx}-1}(z)-j_{N_{máx}-1}(z)y_{N_{máx}}(z)=z^{-2}.$$

Se llega a que

$$j_{N_{\max}-1}(z)=\frac{1}{z^2(H(z)y_{N_{\max}-1}(z)-y_{N_{\max}}(z))},$$

y, por tanto,

$$j_{N_{\max}}(z) = H(z) j_{N_{\max}-1}(z).$$

4. Se generan todas las FBE de primera especie, {jn(z), n=0,1,2...,Nmáx}, considerando los valores calculados de jNmáx(z) y jNmáx-1(z), y usando la relación de recurrencia descendente,

$$j_{n-1}(z) = \frac{(2n+1)}{z} j_n(z) - j_{n+1}(z).$$

En el apéndice A de este trabajo presentamos un esquema resumiendo los pasos del algoritmo indicados en esta sección.

Algoritmos tradicionales para la evaluación de Funciones de Bessel

El algoritmo de Miller en el que se basan los programas que encontramos en (Press, Flannery, Teukolsky y Vetterling, 1986) para el cálculo de FBE de diferentes órdenes y de rango muy amplio se explica a continuación. Este algoritmo comienza calculando directamente y para órdenes bastante altos digamos m las FBE de primera clase *(m>>$N_{máx}$)* utilizando la fórmula de recurrencia descendente

$$\hat{j}_{n-1}(z) = \frac{(2n+1)}{z} \hat{j}_n(z) - \hat{j}_{n+1}(z),$$

dando valores 0 y 1 a $\hat{j}_m(z)$ y $\hat{j}_{m-1}(z)$ respectivamente. Estos valores se eligen al azar. Así, se genera el conjunto $\{\hat{j}_n(z), n=0,1,2,...,m\}$. Entonces se consideran los valores calculados para $\hat{j}_0(z)$ y $\hat{j}_1(z)$ y utilizando los valores bien conocidos de $j_0(z)$ y $j_1(z)$ se calcula la re-normalización constante

$$p(z) = \frac{j_0(z)}{\hat{j}_0(z)}.$$

Finalmente se genera el conjunto

$$j_n(z) = p(z)\hat{j}_n, \; n = 0,1,2,...$$

En el apéndice B de este trabajo presentamos un esquema resumiendo los pasos del algoritmo indicados en esta sección.

Conclusiones

En este trabajo presentamos el método propuesto por Fernández de Córdoba y Ratis (Ratis, *et al,* 1993, pp. 381-388) especialmente útil y eficiente para el cálculo de FB de orden alto, y que es numéricamente muy estable. La característica primordial de este algoritmo es que no requiere las re-evaluaciones de las FB propias de los procedimientos habituales que incorporan relaciones de normalización. La base de su código es el uso del Método de las Fracciones Continuas para relacionar las FB irregulares (de alto orden) con las regulares del mismo orden. Estos códigos tienen aplicación directa en una gran variedad de problemas donde se necesitan FB de alto orden.

Referencias bibliográficas

Abramowitz, M. y Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc.

Barnett, A.R., Feng, D.H., Steed, J.W. y Goldfarb, L.J.B. (1974). Coulomb Wave Functions for all real η and ρ. *Computer Physics Communications 8*, 377-395.

Boyer, C.B. (1994). *Historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad Textos.

Brezinski, C. (1990). *Continued Fractions and Padé Approxiamtions*. Elsevier Science Publishers B.V.

Brezinski, C. (1991). *A Bibliography on Continued Fractions, Padé Approximation, Sequence Transformation, and Related Subjects.* Universidad de Zaragoza.

Carta, J.A., Ramírez, P. y Bueno, C. (2008). A joint probability density function of wind speed and direction for wind energy analysis. *Energy Conversion and Management (49),* 1309-1320.

Luke, Y.L. (1975). *Mathematical Functions and their approximations*. Academic Press.

Miller, J.C.P. (1952). *Bessel Functions, Part II, Functions of Positive Integer Order. Mathematical Tables 10*. Cambridge University Press.

Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. y Vetterling, W.T. (1986). *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*. Cambridge: University Press.

Ratis, Yu.L. y Fernández de Córdoba, P. (1993). A code to evaluate (high order) Bessel functions based on the continued fraction method. *Computer Physics Communications 76*, 381-388.

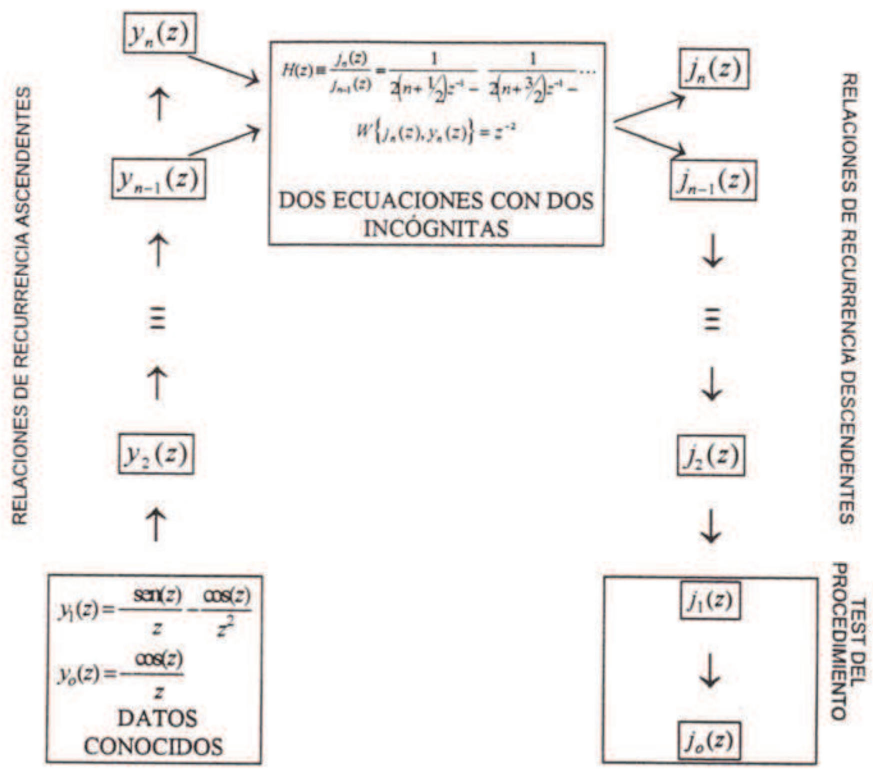
Vaganov, R.B., Korshunov, I.P., Korshunova, E.N. y Shatrov, A.D. (2008). Selection of the microwave-beam parameters in a wireless system for energy transportation from a space electric power station to the Earth. *Journal of Communications Technology and Electronics 53(2)*, 195-198.

Wall, H.S. (1967). *Analytic Theory of Continued Fractions*. Bronx, N.Y.: Chelsea Publishing Company.

Apéndice A

ALGORITMO DE FRACCIONES CONTINUAS

EVALUACIÓN DEL CONJUNTO $BE(z)=\{j_k(z)\ ,\ y_k(z)\ ;\ k=0,\ 1,\ldots,\ n\}$ [1]



Apéndice B

ALGORITMO DE MILLER

EVALUACIÓN DEL CONJUNTO $BE(z) = \{j_k(z)\ ,\ y_k(z)\ ;\ k = 0,\ 1, \ldots,\ n\}$[2]