EL PROCEDIMIENTO DE "RESULTADOS PARCIALES" Y LA PRODUCCIÓN DE SENTIDO EN TORNO A LA DIVISIÓN MEDIANTE UN APRENDIZAJE AUTÓNOMO

Mercedes María Eugenia Ramírez Esperón, Marta Elena Valdemoros Álvarez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
mmramiremx@yahoo.com.mx, mevaldemoros@hotmail.com

Resumen. Se presenta lo encontrado en un estudio piloto ya concluido, el que se efectúo con alumnos de cuarto grado de primaria para investigar el aprendizaje autónomo de la división con dos cifras en el divisor. Se llevó a cabo con una intervención didáctica de corte constructivista, en la cual el docente fue ajustando la ayuda a los estudiantes y éstos tuvieron la oportunidad de hallar la solución por sí mismos a través de toma de decisiones y trabajo grupal empleando fichas de trabajo que le proporcionaban pruebas para autoevaluarse. Mediante un entorno de resolución de problemas se propició darle sentido a las operaciones aritméticas utilizadas y transitar de la división con divisor de una cifra a la de dos. En relación con el algoritmo de la división, se aplicó un procedimiento que consiste en dividir por partes y se encontró que éste fue eficaz en la comprensión de dividir, puesto que el educando va dejando "huellas" de su manera de restar y multiplicar dentro del algoritmo de la división.

Palabras clave: aprendizaje autónomo, división, resultados parciales

Abstract. Results from a pilot study which has already finished are shown in this paper. Such study was carried out with fourth grade elementary school students in order to investigate about the autonomous learning of a division with two-figure divisor. A didactic intervention of a constructivist type was implemented, which the teacher gradually adjusted assistance to students so that the latter had the opportunity to find the solutions by themselves through a process of decision making and team work using work cards which provided evidence for students to self-assess themselves. By means of a problem solving environment, sense could be assigned to the arithmetic operations used and thus move from one figure-divisor divisions to two-figure divisor divisions. In relation to an algorithm of the division, a procedure consisting in dividing by parts was applied, finding that this was efficient in the comprehension of dividing, since the pupil leaves "traces" of his/her way of subtracting and multiplying within the algorithm of the division.

Key words: autonomous learning, dividing by parts

Introducción

El algoritmo de la división crea desconcierto en los alumnos porque, entre otras cosas, vincula otras operaciones, se aprende de manera mecánica, ignorando el valor posicional de los numerales y el divisor compuesto por dos cifras es tratado como si estuviese integrado sólo por una, etcétera; por ello, nos planteamos como *problema de investigación* indagar *las dificultades que enfrenta el estudiante de cuarto grado cuando desarrolla el aprendizaje autónomo de la división con dos cifras en el divisor* y nuestro *objetivo* es *explorar el aprendizaje autónomo de la división, recuperando el sentido que el alumno otorga a los componentes de la división.* En el estudio piloto concluido encontramos algunas respuestas a la *pregunta de investigación*: *¿Qué obstáculos de cálculo y de sentido enfrenta el escolar cuando comienza a resolver la división con dos cifras en el divisor?*

En nuestra investigación empleamos fichas de trabajo donde se le presentan al alumno situaciones problemáticas para que efectúe los procesos de cálculo; en algunas de ellas introducimos un procedimiento que llamamos "resultados parciales", el cual tiene sus antecedentes más remotos en los antiguos egipcios. Este procedimiento se basa en descomponer el dividendo para irlo repartiendo o agrupando equitativamente entre una cantidad dada. Este algoritmo de la división por partes mostró ser un apoyo eficaz en el tránsito de la división de una cifra en el divisor a la de dos cifras, sin perder el sentido y después pasar, con menos dificultades, a efectuar una generalización (esto es, integrar una cantidad variable de cifras en el divisor). Además de las fichas se utilizaron otros instrumentos metodológicos para guiar al estudiante a llegar al algoritmo canónico de la división por medio del trabajo grupal; el alumno fue tomando sus propias decisiones mediante la autoevaluación y logró un aprendizaje autónomo. En el estudio fue enriquecedora la contrastación entre los resultados de la autoevaluación y la evaluación efectuada por los observadores no participantes.

Marco teórico

En la literatura relacionada con la división, Gómez (1993) indica que este algoritmo tiene un alto grado de complejidad debido a que se resuelve de izquierda a derecha y los otros algoritmos se aprendieron comenzando con el orden menor; esto se acentúa porque en el desarrollo de la división se necesitan la sustracción y la multiplicación. Investigadores como Lamb y Brooker (2004) señalan que el origen de varias dificultades son los procedimientos rutinarios que implican la sucesión de acciones como "divide, multiplica, sustrae y baja la cifra siguiente" lo cual se complica cuando la división tiene dos dígitos en el divisor, circunstancia en la cual es posible perder la comprensión de dicha operación.

Otros conocedores que consideramos fundamentales son Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985, p. 7), quienes definen dos tipos de modelos de la división: como reparto y como medida. En el reparto (división partitiva), "un objeto o colección de objetos es dividido en un número de iguales fragmentos o sub-colecciones". Conforme el significado de "medida" (división cociente), "se busca determinar cuántas veces una cantidad dada está contenida en otra cantidad más grande". También, Carraher (1990, p. 216), entre otros, trata la división definiéndola de la siguiente forma: "dados los enteros A y B, existen enteros Q y R, tales que $A = QB + R$ donde $0 \leq R < B$. Esto puede ser transformado en $(A - R)/B = Q$; donde A es el dividendo, B el divisor, Q el cociente y R el residuo".

Así mismo, retomamos a Vergnaud (1991), pues apunta que un algoritmo adquiere sentido a través de problemas y situaciones concretas, mientras que Brown (1981) anuncia diferentes características que tiene la acción de dividir, entre ellas está el marco en el que se plantea el problema a resolver y la correlación entre la comprensión y las habilidades de cálculo. En consecuencia con lo anterior, nuestras fichas de trabajo fueron diseñadas para considerar las fases de la resolución de problemas: a) comprender el problema, b) planear cómo resolver el problema, con base en lo que sabe el estudiante, c) efectuar lo que se planeó y d) después de encontrar la solución, revisarla y discutirla (Polya, 2001).

Por otro lado, en nuestra indagación consideramos la enseñanza como una ayuda ajustada, mediante la cual se orienta al alumno para que vaya construyendo su conocimiento con ayuda de otros, para ello planeamos actividades que favorecieran un aprendizaje autónomo (Becker y Varelas, 1995, Coll y Martín, 1999, Carter y Fleener, 2002, entre otros). También incluimos la institucionalización del conocimiento (Brousseau 2000), para establecer el algoritmo canónico de la división que se fue creando en la dinámica de la situación.

Método

Para describir lo que sucede en el aprendizaje autónomo de la división se trabajó, durante un ciclo escolar, con alumnos de cuarto grado de una primaria oficial de una comunidad que presenta un adecuado rendimiento escolar, necesario en nuestra investigación, la cual es cualitativa y bajo la modalidad de observación participante, donde la observadora-investigadora se compromete e involucra en las mismas actividades que examina; además, toma nota de los rasgos relacionados con el problema de investigación para reflexionar sobre la relevancia de éstos. A continuación se menciona el *plan general* a efectuarse.

Escenario y sujetos

Se efectuó con 18 alumnos de cuarto grado de una escuela vespertina de la ciudad de México, donde la mayoría de los padres de familia ha cursado la educación secundaria y se involucra en las actividades organizadas en el plantel. Los alumnos presentan un adecuado rendimiento escolar, de acuerdo con la Evaluación Nacional para el Logro Académico en Centros Escolares de la Secretaría de Educación Pública. Se eligió a estos alumnos porque la reflexión y regulación de un aprendizaje autónomo requiere de adecuados niveles de comprensión, así como del dominio de los conocimientos previos para resolver problemas de división de dos cifras en el divisor.

Instrumentos metodológicos

Se emplearon dos *cuestionarios*, uno *inicial y* otro *final*, los cuales tuvieron las mismas tareas, con la finalidad de comparar las respuestas de los alumnos respecto al sistema decimal de numeración y las cuatro operaciones fundamentales (evaluación a cargo del investigador). Para promover el aprendizaje autónomo de la división se desarrolló una intervención didáctica constructivista, apoyada en 15 *fichas de trabajo* resueltas de manera individual o en pareja y explicadas después en el pizarrón por algunos compañeros que encontraron soluciones diferentes. En seguida, el alumno escribía en su Diario una reflexión sobre el contenido estudiado y estas ideas fueron expresadas en la última clase durante el debate. La autoevaluación fue llevada a cabo mediante un *portafolios*, el cual contenía las fichas de trabajo y un comentario breve que cada alumno hacía respecto al contenido tratado en esa sesión**.**

También en el estudio piloto se utilizó una *guía de observación* y la *entrevista individual*; para el registro de aspectos fundamentales que se manifestaban en el grupo y obtener información; se eligió la entrevista semi-estructurada por la flexibilidad y libertad en introducir aclaraciones, modificaciones o ampliaciones en el transcurso de su ejecución.

Procedimientos de validación

En este estudio piloto se emplearon dos estrategias de validación: controles cruzados y triangulación. Los controles cruzados fueron efectuados con dos observadoras no participantes, quienes registraron en una guía lo que sucedía en 5 sesiones de enseñanza y en cuanto a la triangulación, ésta fue de carácter mixto, contrastándose los datos aportados por las fichas de trabajo, los cuestionarios, las anotaciones que los alumnos escribieron en su portafolios y las entrevistas individuales.

Modelo de análisis

Para la valoración de resultados se adoptó el enfoque interpretativo con la perspectiva del interaccionismo simbólico (Godino y Llinares, 2000), pues en éste se pone énfasis en las relaciones entre el docente, los estudiantes y la tarea matemática; asimismo, se emplearon entrevistas individuales aplicadas a tres alumnos, quienes fueron seleccionados por representar un alto, mediano y bajo rendimiento, respectivamente (Cohen, Manion y Morrison, 2004). En cuanto al proceso de autoevaluación, se incluyó el portafolios como un instrumento que ayuda al estudiante a reflexionar acerca de su propio aprendizaje (Aebli, 1991 y Danielson y Abrutyn, 2000). En este estudio analizamos los resultados obtenidos durante las 15 sesiones de acuerdo con dos categorías: a) dificultades de cálculo y b) atribución de sentido a través del algoritmo de "resultados parciales".

Análisis de los resultados

En el estudio piloto ya concluido encontramos resultados originales, esto es, contenidos y procesos que no han sido reportados en investigaciones previas. Mostramos observaciones de los *cuestionarios* (I), una *ficha de trabajo* (II) y las *entrevistas individuales* (III).

I. En los *cuestionarios* se observaron diversos errores que el estudiante tiene (A) al utilizar la resta, (B) aplicar la multiplicación dentro del algoritmo de la división, (C) colocar las cifras en el cociente, (D) fragmentar el divisor y otorgar un significado al cero, así como (E) resolver correctamente el algoritmo, pero mostrando falta de sentido en la respuesta dada al problema planteado.

A) 11 9⟌119 - 9 110	2 alumnos (2/18) colocaron los números para resolver la sustracción como se les había enseñado el algoritmo, es decir, consideraron cantidades totales sin distinguir que estaban restando una cantidad de acuerdo con su valor relativo, señalamos que algunas restas fueron resueltas de manera equivocada.
B) 340 ÷ 18 = 2 + 4 525 ÷ 25 = 4 + 5 + 1 - 216 - 100 094 425 - 432 - 105 462 320 Por ejemplo: 18 × 2 = 216 ; 25 × 5 = 105 (sólo el 5 de 25)	Se encontró que 2 alumnos (2/18) resolvieron su respectiva ficha de trabajo con el procedimientos de "resultados parciales" y hallamos cómo construyen sus tablas de multiplicación: doblando o quintiplicando por separado cada dígito. Nota: corresponde al primer paso de la secuencia de cálculo; es el segundo paso.
C) 985 ÷ 24 = 6 + 30 + 5 – 144 841 635 – 720 24 985 121 – 144 – 120 841 01 …	1 alumno (1/18) colocó erróneamente las cifras en el algoritmo convencional, pues suponemos que no tiene un adecuado concepto de valor posicional de los números, ya que "acomodó" las cifras de acuerdo con los resultados parciales que obtuvo.

Resuelve el siguiente problema:

Josefina tiene 562 botones para repartir en 13 montones, si en cada montón debe poner el mismo número de botones ¿cuántos botones colocará en cada montón? ___________ ¿Cuántos botones no quedan en algún montón?__________

D) 12 13 562 - 3 26 - 26 002 - 0	2 alumnos (2/18) separaron los dígitos del divisor cuando se les dificultó considerar el número completo y no colocaron el cero, porque conjeturamos que le otorgaron el significado de "*nada*" por repartir.	E) 43 13 56,2 42 3	1 alumno (1/18) escribió: *"3 sobran y caben 43 montoncitos"*. Suponemos que el sentido se concentra en las palabras "montón" y "cabe". Así, la división de reparto fue comprendida como de agrupamiento.

II. En una *ficha de trabajo* se encontró la falta de valor posicional como se muestra:

Cuando se tiene la tabla de múltiplos del divisor, 2 alumnos (2/18) resuelven la división de la siguiente manera:			
201 18⟌340 20 2	18 x 20 = 320; 340 – 320, 20; 20 entre 18, 1 18 X 1 para 20, 2	5 50 11⟌598 558 8	11 x 5 = 55; 55 y se baja el 8; 11 x 50 = 550 para 558, 8.

III. Las *entrevistas individuales* se aplicaron a 3 alumnos y se obtuvieron estas respuestas:

Rendimiento del alumno / Pregunta	Alto	Mediano	Bajo
Para ti ¿qué fue lo más difícil del procedimiento de “resultados parciales”?	*No se me hizo difícil.*	*Entenderle al principio.*	*Las tablas de multiplicar*
¿Cómo le explicarías el procedimiento de “resultados parciales” a otro compañero que aún no lo conoce?	*Hay una división, después a un lado vas multiplicando hasta que ya no puedas dividir, debajo de la división vas anotando lo que te salió, uno por uno, y se va restando igual hasta que ya no puedas restar.*	Es una división pero de restas, p.e. 156 ÷ 15, ahí le pones un número el que tú quieras y lo multiplicas.	No lo sé.
¿Qué tan fácil o difícil se te hizo resolver los problemas con “la casita” de la división?	*Se me hizo fácil porque le entendí, porque me sabía las multiplicaciones.*	*Fácil porque adentro de la casita se pone el número mayor y afuera el número menor y después se divide.*	Difícil pues no sabía dividir.

En seguida, nuestros hallazgos asociados con las categorías de análisis de este estudio.

a) *Dificultades de cálculo* de algunos estudiantes, quienes:

- Tuvieron desconocimiento de ciertas tablas de multiplicar (particularmente, las correspondientes al 6 y subsecuentes dígitos) y por ello recurrieron a las adiciones o sustracciones iteradas, así, el algoritmo les resultó confuso.
- Les faltó la escritura del cero, tanto en el cociente como en los residuos parciales, por la debilidad de las nociones posicionales construidas anteriormente y las ideas intuitivas de lo que significa el cero (nada, carencia o vacío).
- Presentaron errores en la resolución de las restas con transformación, debido a la ausencia de la noción de agrupamiento y desagrupamiento.

b) *Atribución de sentido a través del algoritmo de "resultados parciales",* de diversos estudiantes que:

- Regularon y controlaron los repartos o agrupamientos efectuados, avanzando hacia la construcción del algoritmo canónico con conocimientos propios.
- No fragmentaron las cantidades del dividendo ni del divisor.
- Transitaron de una a dos cifras en el divisor sin conflicto alguno, pues el procedimiento utilizado era el mismo.
- Algunos alumnos no consideraron el último residuo como la cantidad que quedaba sin dividir y continuaban restándola aún cuando lo sobrante o resto fuera menor que el divisor.

Conclusiones

El procedimiento de "resultados parciales" propició que el alumno tomara decisiones, al elegir el tamaño de los repartos o agrupamientos que fue haciendo él/ella y con ello, desarrolló su aprendizaje autónomo; además, el uso del portafolios le ayudó a reflexionar en sus aciertos y errores respecto de la división. Asimismo, le sirvió para revisar las fichas resueltas y leer sus comentarios, dándose cuenta de sus avances.

El trabajar diversas tareas inmersas en la resolución de problemas y en particular, el uso del procedimiento de "resultados parciales", favorecieron que el alumno pudiera darle sentido al algoritmo de la división, identificando las operaciones involucradas.

En el algoritmo canónico de la división, algunos alumnos tuvieron errores al colocar los residuos parciales, lo cual comprobamos que puede evitarse utilizando el procedimiento de "resultados parciales" porque en éste no se fragmenta el dividendo (el inicial y los parciales), ni el divisor; por ello no se les presentaron dificultades al realizar el pasaje de una a dos cifras en el divisor.

Resolver las diversas tareas de las fichas a través de varias modalidades (individual, en equipo y grupal), apoyó que el alumno aprendiera a dividir mediante sus propias habilidades y con ayuda de los compañeros. Además, la actividad en pareja fomentó mayor involucramiento de los alumnos.

Aunque no todos los alumnos llegaron a utilizar el procedimiento de "resultados parciales", principalmente por el desconocimiento de las tablas de multiplicar, a algunos estudiantes les fue de utilidad cuando se les presentó un problema donde necesitaban resolver una división con dos cifras en el divisor y no habían llegado a comprender "la división de la casita" como ellos le llaman al algoritmo canónico.

En general, en el cuestionario final se observó que hubo un claro avance en la comprensión de lo que implica la división y, por otra parte, los estudiantes mostraron interés en el debate, llegando a importantes conclusiones como: i) El procedimiento de "resultados parciales" es una división pero por partes, ii) cada quien puede poner diferentes números y iii) es necesario saber multiplicar y restar para poder dividir. Nosotros observamos que los alumnos tuvieron necesidad de colocar "letreros" arriba de los datos numéricos para darle sentido al algoritmo (esto es, construyeron categorías semánticas)s. Todo ello ratificó el logro del aprendizaje autónomo de la división.

Referencias bibliográficas

Aebli, H. (1991). Aprender a aprender (151- 175). En *Factores de enseñanza que favorecen el aprendizaje autónomo.* Madrid: Narcea.

Becker, J. & Varelas, M. (1995). Assisting Construction: The Role of the Teacher in Assisting the Learner's Construction of Preexisting Cultural Knowledge (433-446). En L. Steffe & J. Gale (Eds.) *Constructivism in Education*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, M. (1981). Number operations (23-47). En *Children´s Understanding of Mathematics: 11-16*. London: Alden.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. (D. Block & P. Martínez (Trads.). *Educación Matemática, 12*(1). 4-38. E. Wenzelburger (ed). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Carraher, D. W. (1990). Understanding the division: algorithm from new perspectives (215-222). En *Proceeding of the 14th* Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Gobierno del Estado de Morelos, IBM de México y Sección de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del IPN.

Carter, A. & Fleener, M. (2002). Exploring the teacher's role in developing autonomy (819-829). En Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting.North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (V.2), D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant & K. Nooney (Eds.). Columbus, OH: Clearinghouse on Science, Mathematics and Environmental Education.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2004). Interviews. En *Research Methods in Education* (pp. 267-292). Great Britain: RoutledgeFalmer.

Coll, C. & Martín, E. (1999). La evaluación del aprendizaje en el currículum escolar: una perspectiva constructivista. En *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Graó. 163-183.

Danielson, Ch. & Abrutyn, L. (2000). *Una introducción al uso de portafolios en el aula.* México: Fondo de Cultura Económica.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics education 16* (1), 3-17. Georgia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Godino, J. D. & Llinares S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1). E. Wenzelburger (Ed.), México: Grupo Editorial Iberoamérica. 70-92.

Gómez, B. (1993). *Numeración y cálculo* (Vol. 3). España: Síntesis.

Lamb, J. & Booker, G. (2004). The impact of developing teacher conceptual knowledge on students' knowledge of division (177-184). En *Proceedings of the 28thConference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3). M. Johnsen Hornes & A. Berit Fuglestad (Eds.). Bergen, Norway: Bergen University College.

Polya, G. (2001). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas. 17-53.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas. 135-267.

Apéndice. Procedimiento de "resultados parciales"

manzanas cajas manzanas 59 ÷ 5 = 2 + 8 + 1 <u>- 10</u> 49 <u>- 40</u> 09 <u>- 5</u> 04 *Metimos 11 manzanas en cada caja y sobraron 4 manzanas.*	*Si tenemos 59 manzanas para repartir en 5 cajas y en cada caja tenemos que meter la misma cantidad ¿cuántas manzanas van a ir en cada caja? ¿Cuántas quedarán sueltas?* Se escribe el dividendo y el divisor en el orden en que se leen. Inicia el alumno eligiendo un número y lo coloca después del signo igual, el cual es multiplicado por el divisor y su producto es restado del dividendo para dar paso a un residuo parcial; este modo de proceder continúa (colocando un signo de adición entre cada número elegido), hasta que el residuo parcial es menor que el divisor.