PROBLEMAS INVERSOS: LOS CASI OLVIDADOS DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Víctor Martínez Luaces
Fundación Julio Ricaldoni, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República (Uruguay)
victorml@fing.edu.uy, victoreml@gmail.com

Resumen. Este trabajo comienza por analizar y clasificar los problemas inversos en la Matemática y en otras disciplinas. En las aplicaciones y el Modelado Matemático es posiblemente donde mejor se pueden explotar los problemas inversos. Cuando problemas inversos y modelado se combinan, surgen naturalmente los problemas de Modelado Inverso, de los cuales en esta conferencia se analizan algunos ejemplos relativamente sencillos, fáciles de plantear y particularmente ricos para un proceso de enseñanza-aprendizaje basado más en la exploración que en la repetición de procedimientos. Para concluir, se presentan algunos resultados de las experiencias realizadas con alumnos de grado y postgrado en los últimos 14 años. También se comentan algunas experiencias recientes en cursos de actualización y perfeccionamiento para profesores.

Palabras clave: problemas inversos, aplicaciones, modelado matemático

Abstract. In this paper, inverse problems in Mathematics and other disciplines are analysed and classified. In modelling and applications is perhaps where best results about inverse problems can be obtained. When both modelling and inverse problems are combined, interesting problems so-called Inverse Modelling problems naturally arise. Several examples are analysed here, from the mathematical education view point, tacking into account their richness for a creative teaching and learning process based on exploration rather than in repetition of procedures. Finally, results of our experiences with graduate and undergraduate courses in the last 14 years are commented here as well as our last experiences in teacher training courses.

Key words: inverse problems, applications, mathematical modelling

Introducción

Investigar es de alguna manera resolver problemas. Sin intención de dar una clasificación rigurosa, en principio se puede hablar de problemas directos e inversos. Los problemas directos, según Groetsch (2001) pueden ser vistos como aquellos en los que se provee la información necesaria para llevar a cabo un proceso bien definido, estable, que lleva a una única solución.

Los problemas inversos, en cambio, son más difíciles e interesantes y esto se debe en gran parte a que, o bien tienen múltiples soluciones o bien son insolubles (Bunge, 2006) y se presentan habitualmente en la práctica profesional de muchas carreras y profesiones. Por ejemplo, dada una cierta enfermedad enumerar los síntomas es un problema directo y sencillo, que ya está resuelto y se puede ver en cualquier texto especializado. En cambio, diagnosticar la enfermedad del paciente a partir de sus síntomas no siempre es sencillo y requiere un médico experimentado.

En las películas o libros de detectives, el personaje central debe identificar a los autores de un crimen conociendo como eran sus víctimas, los testimonios de los testigos y las pistas que surgen de la escena del crimen. Nuevamente, no es más, ni tampoco menos, que un problema inverso.

En la Psicología, o simplemente en nuestro trato diario con otras personas, intentamos adivinar las intenciones de los demás sobre la base de cómo es su comportamiento. Esto implica que todo el tiempo en nuestras relaciones laborales, afectivas, etc., estamos permanentemente resolviendo problemas inversos.

Finalmente, en la Filosofía, cabe citar esta frase de Bunge (2006): "El que casi todos los filósofos hayan ignorado las peculiaridades de los problemas inversos plantea este otro problema inverso: el de adivinar los motivos de este descuido descomunal por parte de los filósofos".

Clasificación de los problemas inversos

En principio hay dos tipos diferentes de problemas inversos, pero para caracterizarlos correctamente comencemos por esquematizar el problema directo, adaptando un estudio realizado por Groetsch (2001, p. 89). Para este autor, un problema directo responde al siguiente esquema:

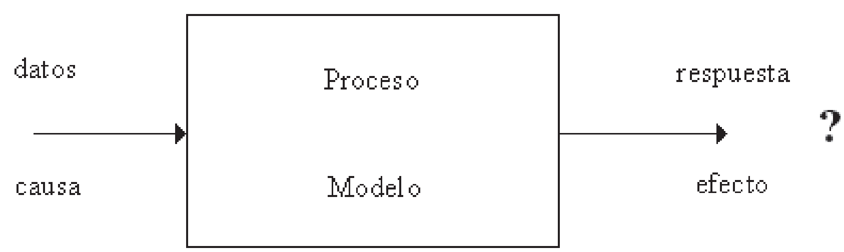

Figura 1. Esquema de los problemas directos.

En el esquema de la Figura 1, se dispone de datos y de un cierto procedimiento y se solicita el resultado, por ejemplo se dan dos polinomios, se conoce el algoritmo de división y se solicitan como respuesta, los polinomios cociente y resto.

Ahora bien, cambiando un poco el esquema resultan dos problemas inversos: el problema de causalidad (Figura 2) y el de especificación (Figura 3):

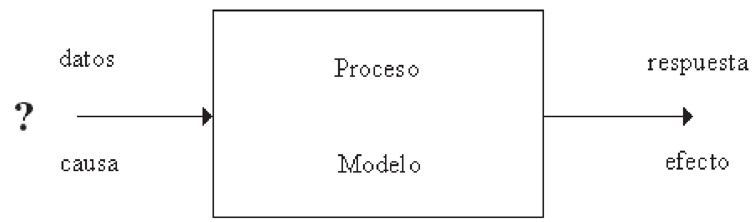

Figura 2. Esquema de los problemas de causalidad.

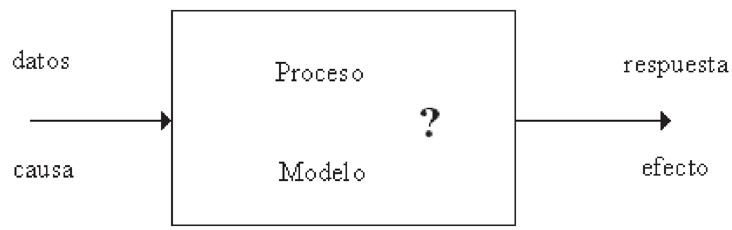

Figura 3. Esquema de los problemas de especificación.

Ambos tipos de problemas son comunes en las carreras químicas (en Ing. Qca., Bioquímica, Qca. Farmacéutica, etc.). Por ejemplo en Análisis Químico Cualitativo es común suministrar al alumno un tubo de ensayo con una solución problema que contiene tres o más cationes, en principio desconocidos. El estudiante debe realizar una secuencia de reacciones preestablecida y de acuerdo a sus resultados descartar o confirmar la presencia o ausencia de ciertos cationes más comunes. Ese procedimiento, denominado "Marcha sistemática de cationes", permite, a partir de los resultados (formación de precipitados, turbidez, coloreado de la solución, etc.), deducir cual sería la composición de la muestra problema. Evidentemente, es un claro ejemplo de problema de causalidad, pues el procedimiento esta preestablecido, los resultados están a la vista y el objetivo es conocer qué composición de la solución es compatible con los resultados obtenidos.

En Qca. Inorgánica, por ejemplo, suele ser más común el problema de producir una cierta sal a partir de sustancias más simples (óxidos, hidróxidos, anhídridos, etc.). Una práctica típica de Qca. Inorgánica es el proceso Solvay donde se obtienen Na_2CO_3 y $NaHCO_3$ (utilizados en la industria del vidrio, papel, jabón, etc.) a partir de $NaCl$ y el CO_2 , mucho más comunes y fáciles de obtener. El problema no está entonces en conocer los reactivos y/o los productos sino en conocer y realizar correctamente el proceso que permite llegar a los productos deseados a partir de reactivos fácilmente disponibles y económicos. Claramente, se trata de un problema de especificación.

Finalmente, en Qca. Orgánica suele estar presente en forma simultánea el doble problema inverso (causalidad y especificación). Por ejemplo en el tema "síntesis orgánica", se suelen presentar cuatro formas distintas de preparar acetona, partiendo de 4 reactivos diferentes: acetato de etilo, acetonitrilo, acetaldehído o incluso 2-metilpropeno. Obviamente ni los reactivos, ni mucho menos el proceso, están determinados y sólo se conoce el producto final o molécula objetivo a ser obtenida.

Problemas inversos en matemática educativa

Como señalan algunos autores, los problemas directos dominan el currículo en los cursos tradicionales de Matemática. No obstante, si se desea modernizar los contenidos de los cursos, los problemas inversos deberían tener un papel preponderante ya que proveen una plataforma para explorar cuestiones de existencia, unicidad y estabilidad (Groetsch, 2001 y Martínez Luaces, 2009) a la vez que plantean situaciones más interesantes y cercanas a la vida real. Esto además, se puede hacer a todo nivel como veremos en los siguientes ejemplos.

A nivel de escuela primaria se enseña desde muy temprano a multiplicar los números naturales, lo que evidentemente es muy sencillo y carece de dificultades. Mucho más interesante es el problema inverso, consistente en escribir un número natural como producto de otros dos. Este problema siempre tiene solución gracias al rol excepcional de la unidad como neutro del producto, sin embargo la unicidad conduce al concepto central de número primo. El planteo reiterado de este problema inverso desemboca en el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Pasando al siguiente nivel, por ejemplo, la Enseñanza Secundaria, sucede algo similar con el producto de polinomios (problema directo de solución muy sencilla y algorítmica) y su inverso: el factoreo de expresiones polinómicas. Para este problema no hay una solución definitiva, por lo que en general se suele presentar el tema en seis casos con sus respectivas variantes: factor común, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto, cuatrinomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados, suma y resta de potencias de igual exponente (este último con 3 variantes, según sea suma o resta y en este caso, a su vez, según la paridad de los exponentes). El factoreo de polinomios conduce a otro teorema central de la Matemática (el Teorema Fundamental del Algebra), pero su aplicabilidad se ve limitada, del punto de vista algebraico por las dificultades para hallar raíces complejas de polinomios de grado tres o superior y la imposibilidad (en general) a partir del quinto grado.

Pasando ya al nivel superior, un problema directo de Matemática Financiera consiste en calcular cuánto cobrará a su retiro un trabajador que desarrolló su actividad por N años, realizando aportes mensuales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (si fueran N años completos, sería $k = 12N$).

Esto puede ser un poco engorroso, pero no es difícil y de hecho, en la vida real hay programas que se encargan de hacer automáticamente dicho cálculo. Mucho más interesante y complicado es el problema inverso: ¿cuántos años se debe trabajar y cuánto se debería aportar para tener derecho a un retiro razonable? La solución no es sencilla ni es única y tampoco esta claro cuál puede ser la mejor opción de las varias disponibles. De hecho, esto es lo que motiva a las diversas opciones que compiten en el mundo real: seguros, jubilaciones privadas, administradoras de fondos provisionales, etc.

Finalmente, un problema directo extremadamente sencillo, de Aritmética Elemental, consiste en sumar dos números primos impares. El resultado obviamente es un número par, pero, ¿qué sucede con el problema inverso? ¿Es posible descomponer un número par como suma de dos números primos? Esta pregunta dio origen a la famosa "conjetura de Goldbach" (postulada en 1742), cuya solución mas de 250 años después sigue siendo desconocida ("Conjetura de Goldbach", sf).

Nuestras experiencias y el modelado inverso

En 1996 se nos encomendó organizar un nuevo curso de Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería Química e Ingeniería de Alimentos. Desde un comienzo se intentó dar a este curso, originalmente denominado Matemática III, un enfoque netamente aplicado, con problemas de otras asignaturas y de la vida real y profesional. Particularmente, los problemas de Cinética Química (Martínez Luaces, 2005, 2007 y 2009) mezclas y reactores (Martínez Luaces, 2005 y 2009), entre otros, sirvieron para proveer ejemplos interesantes de aplicación y modelado con E.D.O., Transformación de Laplace y E.D.P. (Martínez Luaces, 2003 y 2009).

En 1997 comienza una línea de colaboración con investigadores de Electroquímica (Facultad de Ciencias) y de Corrosión (Facultad de Ingeniería) en la que se hace necesario proponer mecanismos de reacciones electroquímicas y/o electrocatalíticas (Martínez Luaces, 2009) que expliquen, o al menos sean compatibles con las curvas que se obtienen experimentalmente. Se inicia así una nueva etapa en la cual se proponen o se descartan mecanismos de reacciones electroquímicas/electrocatalíticas – y concomitantemente se aceptan o se rechazan eventuales modelos matemáticos – en función de su ajuste o no a los resultados de laboratorio. A partir de agosto del año 2000 (Martínez Luaces, 2009) este nuevo tipo de problemas que hemos dado en llamar de *modelado inverso,* se integran definitivamente a nuestros cursos.

En dos artículos publicados en *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (iJMEST), del año 2005 (Martínez Luaces, 2005) y 2009 (Martínez Luaces, 2009) respectivamente, damos a conocer nuestras experiencias educativas con *modelado directo* y *modelado inverso*, las cuales comenzaron con problemas de cinética de reacciones químicas, electroquímicas y electrocatalíticas (Martínez Luaces, 2009), pero luego se extendieron a otros problemas de diferentes áreas como problemas de mezclas, circuitos eléctricos, reactores, dinámica de poblaciones, etc.

Estos problemas y otros fueron recopilados en un libro (Martínez Luaces, 2009) y también fueron expuestos en distintos cursos para docentes e investigadores, como los realizados en RELME XV, EMCI XII, EMCI XV y RELME XXIV (Martínez Luaces, 2005, 2009 y 2010).

Resultados

En uno de los artículos antes mencionados (Martínez Luaces, 2009), se han publicado resultados estadísticos referentes a las experiencias anteriormente comentadas. En este trabajo se ha optado por un criterio distinto, dando prioridad a los comentarios de los propios alumnos. Cronológicamente, estas opiniones pueden dividirse en dos períodos bien diferentes: un primer período experimental, en el cual se puso en marcha un "curso piloto", previo a la puesta en marcha del nuevo plan (que comenzó a regir en el año 2000) y el curso posterior a la implantación de dicho plan.

En el nuevo plan se propuso incrementar la carga horaria del curso en 2 horas semanales, lo cual era conocido por los docentes con suficiente anterioridad. Por este motivo, en los últimos años previos a la puesta en vigencia de este nuevo plan de estudios, se decidió agregar un módulo de una hora y media semanal, de carácter opcional, con problemas de aplicaciones. Si bien todavía estaba vigente el plan anterior, prácticamente el 100 % de los alumnos se quedaban a dicho módulo adicional de una hora y media. Sus opiniones al final del curso, reflejaban una actitud muy positiva hacia el mismo, como surge de los comentarios siguientes:

> *"Ahora le encuentro utilidad a la matemática..."*
>
> *"...un curso súper bueno, me aporto muchísimo."*
>
> *"...curso interesante, con bastantes aplicaciones a la vida real, ..."*

En especial, en lo que refiere a las aplicaciones, incluidas en el módulo optativo de una hora y media semanal, dijeron:

> *"...si no se dan...sería un curso de matemática mas, seguiría siendo una materia 'pesada' con solo métodos, cálculos, números,..."*

Una vez puesto en marcha el nuevo plan de estudios, el módulo de aplicaciones pasó de ser opcional a obligatorio y pasó a ocupar dos horas semanales en lugar de la hora y media que tenía durante el curso piloto. La ampliación e incluso la obligatoriedad del mismo no cambiaron sustancialmente la situación, como lo revelan las opiniones de los estudiantes frente a una encuesta abierta realizada a la finalización del mismo.

Algunas de sus opiniones, fueron las siguientes:

> *"Muy aplicable a la carrera, da un nuevo gusto por la matemática y está bien dada, guiando la resolución del ejercicio y no haciéndolos todos..."*
>
> *"El curso me pareció muy útil y dinámico y pienso con gran aplicación para los próximos años."*

En lo que refiere a las aplicaciones, estas fueron algunas de sus opiniones:

> *"...incentivan ya que se observa la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y muestra claramente la interacción que existe con otras materias."*
>
> *"...tengo realizados cursos que se aplican a los temas tratados en las aplicaciones."*
>
> *"...son muy útiles para seguir la carrera..."*

Como se puede ver, los alumnos valoraron muy positivamente no sólo el curso que recibieron (antes y después de la puesta en marcha del nuevo plan), sino que también apreciaron especialmente dentro de este curso, el módulo de aplicaciones.

Los resultados estadísticos publicados en (Martínez Luaces, 2009) confirman estas opiniones, oportunamente vertidas en las encuestas abiertas ya comentadas.

Conclusiones

Como dice Bunge, "El problema de los problemas inversos es de gran interés teórico porque se refiere a las investigaciones más difíciles en todos los campos..." y además "...la resolución de un problema inverso involucra síntesis o razonamiento regresivo, o sea de conclusiones a premisas o de efectos a causas" (Bunge, 2006).

A nosotros como docentes, esto nos deja un margen enorme para plantear problemas creativos, que permiten desarrollar las habilidades, estrategias y pensamiento crítico de los estudiantes.

Particularmente, en lo que refiere a las estrategias, Bunge (Bunge, 2006) menciona algunas:

> *Transformar el problema en uno diferente, pero soluble*
>
> *Atacar la familia de los problemas directos, ya que uno de sus miembros puede dar la clave para resolver el problema inverso considerado*
>
> *Suponer distintos escenarios en el pasado que pueden haber desembocado en los resultados del presente*

Inventar y ensayar hipótesis plausibles hasta dar con la verdadera

La sola enumeración de estas y otras eventuales estrategias ya nos da una idea más que clara de su potencial educativo, en tanto permite proponer eventuales hipótesis, mecanismos, modelos, etc., ensayarlas y evaluar sus resultados. Por otra parte, de estos problemas resulta una plataforma invalorable para el trabajo multidisciplinario (Martínez Luaces, Camarena y Sallet, 2004).

Nuevamente citando a Bunge: "los problemas inversos son tan difíciles y han sido tan discriminados que el primer congreso internacional sobre el tema se realizo recién en 2002" y "los tratados sobre el tema se cuentan con los dedos de la mano". Esto quiere decir, que si bien los problemas inversos (al menos en Matemática) datan de 5 siglos – el primero es atribuido a Tartaglia (Groetsch, 2001) en 1537 – es muy poco lo que se ha avanzado. Teniendo en cuenta este hecho y su innegable potencial educativo, creemos firmemente que la investigación y desarrollo de problemas inversos, constituye un desafío ineludible para los Educadores Matemáticos de este nuevo siglo.

Referencias bibliográficas

Bunge, M. (2006). *Problemas directos e inversos*, Recuperado el 30 de abril de 2010 de http://grupobunge.wordpress.com/2006/07/20/119

Groetsch, C.W. (2001). Inverse problems: the other two-thirds of the story, *Quaestiones Mathematicae, Supplementary Issue (1)*, 89-93.

Martínez-Luaces, V. (2003). Mass Transfer: the other half of parabolic P.D.E. *New Zealand Journal of Mathematics, 32 (Supplementary issue)*, 125-133.

Martínez Luaces, V., Camarena Gallardo, P. y Sallet Biembengut, M. (2004). Modelos Matemáticos. En Díaz Moreno (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17(1)*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez Luaces, V. (2005). Engaging Secondary School and University Teachers in Modelling: Some Experiences in South American Countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 36(2-3)*, 193-205.

Martinez Luaces, V. (2005). Laplace Transform across boundaries. In M. Bulmer (Ed.), *Proceedings of Kingfisher Delta '05, Fifth Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning*. Australia: ISC-Delta.

Martínez Luaces, V. (2007). Inverse-modelling problems in chemical engineering courses, En A. D'Arcy-Warmington, V. Martínez Luaces, G. Oates y C. Varsavsky (Eds.) *Proceedings of*

Calafate Delta '07, Sixth Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning. Uruguay: ISC-Delta.

Martínez Luaces, V. (2009). *Aplicaciones y modelado: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Transformación de Laplace, Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Montevideo: Matser.

Martínez Luaces, V. (2009). Modelling and inverse-modelling: experiences with O.D.E. linear systems in engineering courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 40(2)*, 259-268.

Martinez Luaces, V. (2009). Modelling, applications and inverse modelling: innovations in differential equations courses. En D. Wessels y C. Snyman (Eds.), *Proceedings of Southern Right Delta '09, Seventh Southern Hemisphere Conference on Undergraduate Mathematics and Statistics Teaching and Learning*. South Africa: ISC-Delta.

Martínez Luaces, V. (2009). Problemas de modelado directo e inverso con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Transformación de Laplace. En R. Fanjul (Ed.), *Memorias de EMCI-XV*. Argentina: Comité Permanente de EMCI.

Martínez Luaces, V. (2010). EDO y EDP: Aplicaciones y problemas inversos. En C. Lara (ed.), *Programa y Libro de Resúmenes de RELME 24.* Guatemala: Comité de RELME 24.

Conjetura de Goldbach. (sf). Recuperado el 30 de abril de 2011 de http://es.wikipedia.org/wiki/Conjetura_de_Goldbach