

## COMPRESIÓN DE IDEAS FUNDAMENTALES DE ESTOCÁSTICOS EN EL BACHILLERATO UNIVERSITARIO

María del Socorro Rivera Casales; Ana María Ojeda Salazar  
DME, Cinvestav, IPN.

México

[msrivera@cinvestav.mx](mailto:msrivera@cinvestav.mx), [amojeda@cinvestav.mx](mailto:amojeda@cinvestav.mx)

Campo de investigación: Pensamiento relacionado con  
probabilidad y estadística

Nivel: Medio

**Resumen.** *La presente investigación, de carácter cualitativo, concierne a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de estudiantes de la Escuela Nacional Preparatoria, donde se imparte la asignatura Estadística y Probabilidad hasta el 6º grado como materia optativa y con carácter teórico, para todas las áreas de orientación vocacional. La investigación, documental en su primera etapa, se refiere al programa de estudios de la asignatura y al principal libro de texto que recomienda. De entre los resultados, la incongruencia entre programa y texto en cuanto a secuencia, el planteamiento en el libro de texto de ejemplos y de ejercicios carentes de referentes, principalmente para la aplicación de “fórmulas”, evidencia en la propuesta institucional la falta de diversidad que compromete el objetivo de la asignatura como introductoria a estocásticos para los estudiantes de todas las áreas.*

**Palabras clave:** comprensión, estocásticos, bachillerato

### Introducción

El programa *Estadística y Probabilidad* de la Escuela Nacional Preparatoria, que se imparte hasta el 6º grado como materia optativa y con carácter teórico para las áreas: I Físico Matemáticas e Ingenierías, II Ciencias Biológicas y de la Salud, III Ciencias Sociales, IV Humanidades y Artes, muestra cambios significativos en la estructura y secuencia de los contenidos y en su enfoque metodológico, basado en la solución de problemas. Por medio de los contenidos propuestos, pretende que el alumno conozca, comprenda y aplique la estadística descriptiva, la simbología de los conjuntos, y el concepto de probabilidad en el planteamiento de problemas.

Las preguntas de la investigación planteadas en nuestro proyecto se refieren a la caracterización de la propuesta para el estudio de estocásticos en el bachillerato universitario, así como de la comprensión de estudiantes de preparatoria de ideas fundamentales de estocásticos, resultante de su enseñanza en el aula.

### Fundamentos Teóricos

Desde un enfoque epistemológico, Heitele (1975) propuso diez ideas fundamentales de estocásticos como guía de un currículo en espiral y recomendó fomentar la intuición probabilística. La intuición es un desarrollo cognitivo basado en la experiencia, por tanto, educa los procesos de aprendizaje intuitivo de las personas de modo que sigan más estrechamente los cánones del método científico (Hogarth, 2002). La intuición, además, juega un papel muy importante en el pensamiento (Fischbein, 1975). La investigación epistemológica de conceptos básicos de probabilidad revela la naturaleza teórica de conceptos matemáticos, como resultado de la interacción entre objeto, signo y concepto (Steinbring, 2005).

### Lógica de la investigación y métodos

La investigación se propone en el orden cualitativo (Eisner, 1998). Su organización y lógica se divisan en el planteamiento de un conjunto de estrategias de enseñanza de estocásticos en el aula de preparatoria, en la modalidad de *aula alterna* (Ojeda, 2006). El proceso de la investigación está constituido por tres etapas:

- *Primera etapa: Propuesta institucional.* Se someten a examen el programa de estudio de estadística y probabilidad en el bachillerato universitario (ENP, 1996, clave1712).
- *Segunda etapa: Aula alterna.* Curso como escenario de investigación, con la participación de un grupo de estudiantes de 6º grado de preparatoria, el docente titular de matemáticas y la investigadora. Un acuerdo colegiado establecerá la vinculación docencia-investigación que permita el acceso al aula **real**, la aplicación de instrumentos y el uso de la técnica de video para la recopilación de datos. La interacción con el docente se basará en la selección de situaciones específicas, familiares a los estudiantes, para la enseñanza de ideas de estocásticos implicadas en ellas, y en estrategias para esa enseñanza. Interesa en particular la introducción de ejercicios de aplicación orientados a cada una de las Áreas I, II, III, IV, para las que prepara el plan de estudios de la escuela nacional preparatoria.
- *Tercera etapa: Entrevistas semiestructuradas individuales.* Interrogatorio individual en cámara de Gesell por la investigadora a cuatro estudiantes, en sesiones videograbadas.

Para todo el proceso, la célula de análisis (Ojeda, 2006) establece los criterios para examinar los datos recopilados: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), otros conceptos matemáticos, recursos semióticos (gráficos), términos empleados referentes a la estadística y a la probabilidad, tipo de situaciones propuestas que implican las ideas fundamentales de estocásticos.

Un estudio exploratorio con 25 estudiantes de bachillerato antecedió a las etapas segunda y tercera, que ha informado sobre el diseño de cuestionarios y de guiones de entrevista para aplicar en ellas.

## Resultados

Aquí se presentan sólo los resultados de la primera etapa y del estudio exploratorio.

**Primera etapa.** El examen de la propuesta institucional resulta en una consideración deficiente de ideas fundamentales de estocásticos con los medios utilizados para la enseñanza. Se ha identificado la limitación de correspondencia entre el programa de estudio y lo propuesto en los libros de texto (ver Tabla 1).

Propuesta institucional	Libro de texto
Primera unidad. Estadística descriptiva	(Infante, 1991)
<b>Introducción. Variables. Datos. Clasificación y construcción de bloques estadísticos. Organización de los datos por medio de tablas. Tipos de gráficas. Introducción a la sumatoria. Análisis de datos de una variable: medidas de tendencia central y de localización. Medidas de dispersión o variabilidad. Análisis descriptivo de datos divariados: Correlación.</b>	<b>Introducción (p. 11). Métodos tabulares y gráficos para la organización y presentación de datos (p. 17). Cálculo y selección de medidas descriptivas (p. 47). Variables aleatorias y sus distribuciones. Momentos. (p. 127).</b>
Segunda unidad. Conjuntos	(Cárdenas, 1973)
<b>Conjuntos. Idea intuitiva (por extensión y por comprensión). Conceptos básicos y simbología. Subconjuntos. Conjunto universal. Conjunto vacío. Operaciones con conjuntos. Cardinalidad de la unión, de la intersección y su complemento.</b>	<b>Conceptos preliminares. (p. 13)</b> <b>1. Conjuntos</b> <b>2. Subconjuntos</b> <b>3. Operaciones con conjuntos</b> <b>4. Producto cartesiano</b> <b>9. Cardinalidad y conjuntos finitos</b>
Tercera Unidad: Probabilidad	(Infante, 1991)
<b>Espacio muestral. Experimentos y eventos. Principio fundamental del conteo. Análisis combinatorio. Conceptos de probabilidad. Eventos. Teoremas de la probabilidad. Variables aleatorias: discretas y continuas. Funciones de distribución para variables aleatorias continuas y discretas.</b>	<b>Experimentos aleatorios, espacios muestrales y eventos. (p. 102). Población y muestra. Probabilidad. Probabilidad condicional. El teorema de Bayes y las probabilidades subjetivas.</b>

Tabla 1. Distribución paralela de los temas de la propuesta institucional y el libro texto sugerido como bibliografía básica.

El análisis de la bibliografía básica y de la propuesta institucional reveló la poca importancia que se otorga en el bachillerato universitario a la enseñanza de estocásticos en general (Rivera, 2007) y se otorga prioridad a otros contenidos matemáticos. La Tabla 2 resume el análisis de la propuesta institucional.

<b>Ubicación</b>	Primera Unidad: Estadística descriptiva. <b>Introducción. Variables. Datos. Clasificación y construcción de bloques estadísticos. Organización de datos por medio de tablas. Tipos de gráficos. Introducción a la sumatoria. Análisis de datos de una variable: medidas de tendencia central y de localización. Medidas de dispersión o variabilidad. Análisis descriptivo de datos divariados: Correlación.</b>
<b>Propósito</b>	<b>Que el alumno sea capaz de diferenciar, organizar, representar gráficamente e interpretar el significado que un conjunto de datos tiene en relación con un fenómeno relativo a su entorno social, para vincular la estadística con su realidad.</b>
<b>Situación que se plantea</b>	<b>Organizar, diferenciar, representar e interpretar datos</b>

<b>Ideas de estocásticos</b>	<b>Medida de probabilidad. Espacio muestra. Adición de probabilidad. Regla del producto e independencia. Combinatoria. Variable aleatoria. Ley de los grandes números. Idea de muestra.</b>
<b>Otros conceptos matemáticos</b>	<b>Operaciones aritméticas, orden, números reales.</b>
<b>Recursos semióticos</b>	<b>Figuras y diagramas. Gráficas. Simbología matemática. Lengua natural</b>
<b>Términos para la referencia de estocásticos</b>	<b>Clase o intervalo. Medidas de tendencia central. Frecuencia.</b>
<b>Ubicación</b>	Segunda Unidad: Conjuntos. <b>Conjuntos: Idea intuitiva (por extensión y por comprensión). Conceptos básicos y simbología.</b> <b>Subconjuntos. Conjunto universal. Conjunto vacío.</b> <b>Operaciones con conjuntos. Cardinalidad de la unión, de la intersección y del complemento.</b>
<b>Propósito</b>	<b>Que el alumno reafirme los conocimientos sobre conjuntos y sus operaciones básicas, previamente adquiridos, para que los apliquen en problemas de análisis combinatorio y probabilidad.</b>
<b>Situación que se plantea</b>	<b>Análisis combinatorio y probabilidad</b>
<b>Ideas de estocásticos</b>	<b>No contiene ideas fundamentales de estocásticos.</b>
<b>Otros conceptos matemáticos</b>	<b>Operaciones aritméticas, orden, números reales, figuras geométricas.</b>
<b>Recursos semióticos</b>	<b>Gráficas. Simbología matemática. Lengua natural.</b>
<b>Términos para la referencia de estocásticos</b>	<b>Unión, intersección y cardinalidad.</b>
<b>Ubicación</b>	Tercera Unidad: Probabilidad. <b>Espacio muestral. Experimentos y eventos. Principio fundamental de conteo. Análisis combinatorio.</b> <b>Concepto de probabilidad. Eventos. Teoremas de probabilidad.</b> <b>Variables aleatorias: discretas y continuas.</b> <b>Funciones de distribución para variables aleatorias continuas y discretas.</b>
<b>Propósito</b>	<b>Que el alumno sea capaz de identificar a la probabilidad como un instrumento confiable en la inferencia y toma de decisiones.</b>
<b>Situación que se plantea</b>	<b>Probabilidad clásica.</b>
<b>Ideas de estocásticos</b>	<b>Medida de probabilidad. Espacio muestra. Adición de probabilidad. Regla del producto e independencia</b> <b>Combinatoria. Equiprobabilidad y simetría. Modelo de urna y simulación. Variable aleatoria. Ley de los grandes números. Idea de muestra.</b>
<b>Otros conceptos matemáticos</b>	<b>Operaciones aritméticas, conjuntos, orden, números reales.</b>
<b>Recursos semióticos</b>	<b>Tablas de frecuencia, gráfica.</b>
<b>Términos para la referencia de estocásticos</b>	<b>Eventos, posibilidad, probabilidad, muestra, frecuencia, azar, permutación, combinación</b>

Tabla 2. Análisis de la Propuesta Institucional (Programa de Estudio de la ENP, 1996, clave1712)

El programa de estudios plantea un acercamiento tradicional, formal, de los contenidos de Estadística y de Probabilidad. A modo de ejemplo, presentamos un problema que presenta el libro de texto (Infante 1991, pag.104) que ilustra la identidad objeto/signo.

*En una caja hay 6 cubos iguales enumerados. De a uno a la vez se extraen al azar todos los cubos de las cajas. Hallar la probabilidad de que los números de los cubos extraídos aparezcan en un orden creciente.*

El problema demanda la aplicación del enfoque clásico de probabilidad. Se refiere a una situación de la que no se hace explícita alguna aplicación que pudiera tener en un ámbito particular. La presentación de la situación de referencia (en lengua natural y un numeral) es del mismo tipo que la presentación del concepto cuya aplicación se demanda (en lengua natural) (ver Figura 1).



Figura 1. Aplicación del triángulo epistemológico en el análisis de la presentación de los contenidos de probabilidad en el libro de texto

La situación presentada podría haber dado lugar a un acercamiento frecuencial a la probabilidad solicitada, mediante 60 repeticiones (por ejemplo) de la extracción al azar sin reemplazo de un boleto de la urna hasta agotarlos, registrar los resultados e identificar aquéllos en los que se hubieran obtenido los boletos en orden creciente, para proceder a la identificación de su frecuencia relativa y motivar así la aplicación del enfoque clásico de probabilidad.

En consecuencia, se plantea en la presentación de los contenidos en el libro de texto una deficiencia de relación entre objeto, signo y concepto (Steinbring, 2005).

### Resultados del estudio exploratorio

La segunda etapa incluye la aplicación a los estudiantes de un cuestionario exploratorio después de la enseñanza en el aula y la realización de tres entrevistas semiestructuradas.

**Cuestionario exploratorio.** Este instrumento consiste en ocho reactivos de preguntas abiertas en secuencia de acuerdo a la propuesta institucional, y en dos versiones “A” y “B”, diferentes sólo en el orden de los reactivos para evitar copia de las respuestas individuales. Se han diferenciado los reactivos por área.

El cuestionario se aplicó a un grupo de 25 estudiantes, ocho orientados hacia el Área I, cinco hacia el Área II, 12 hacia el Área III y ninguno del Área IV, en una sesión de 1 hora 40 minutos, en el aula de matemáticas de su plantel. En general, el cuestionario fue difícil para los estudiantes (Rivera, 2008). A manera de ejemplo, presentamos uno de los reactivos incluidos en el cuestionario presentado en la Tabla 3.

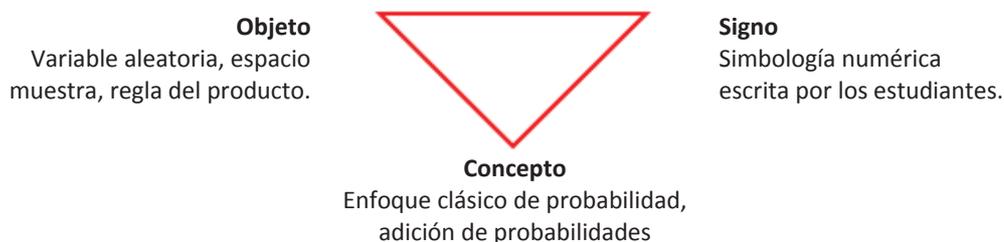
*Se lanzan un dado blanco y uno negro. Encontrar la probabilidad de que la suma de los números superiores de cada dado sea 7 y que el número del dado negro sea mayor que el del dado blanco.*

El reactivo demanda la aplicación del enfoque clásico de la probabilidad. La Tabla 4 resume su análisis.

Características	Cuestionario exploratorio versión “A” reactivo 2, cuestionario exploratorio versión “B” reactivo 7.
Ubicación	Unidad III. Probabilidad
Contenido	Principio Fundamental del Conteo. Análisis combinatorio Concepto de probabilidad.
Propósito	Resolver e interpretar problemas del principio fundamental del conteo y probabilidad clásica.
Situación que se plantea	Conexión aleatoria de elementos no desgastados.
Términos para referirse a estocásticos	Aleatoria, probabilidad
Ideas de estocásticos por identificar	1. Medida de probabilidad. 2. Espacio muestra 3. Adición de probabilidad 4. Regla del producto e independencia 5. Combinatoria 6. Variable aleatoria
Otros contenidos matemáticos	Números naturales, operaciones aritméticas
Formas para representar situaciones y datos	Lengua natural, expresiones matemáticas, signos, gráficos.

Tabla 3. Análisis de los reactivos 7”A” y 2”B”

La Figura 2 ilustra la aplicación del triángulo epistemológico en el análisis de las respuestas de los estudiantes.



La Figura 2. Aplicación del triángulo epistemológico en el análisis de las respuestas de los estudiantes.

La Tabla 4 resume la frecuencia de identificación por los estudiantes de ideas fundamentales implicadas en el reactivo. Es de señalar la dificultad en distinguir entre los valores de la variable aleatoria y los eventos correspondientes; esto es, los estudiantes confundieron las ideas de espacio muestra y de variable aleatoria. Esta dificultad se reveló aún más extrema que la ya tradicional de falta de identificación de la idea de independencia.

Criterios de análisis	No. de alumnos
1. Medida de probabilidad	15
2. Espacio muestra	0
3. Adición de probabilidad	1
4. Regla del producto e independencia.	8
5. Combinatoria	11
6. Variable aleatoria	18
7. Números naturales	15
8. Operaciones aritméticas	13
9. Lengua natural	6
10. Expresiones matemáticas	18
11. Signos	5
12. Gráficos	0

Tabla 4. Frecuencia de respuestas a los reactivos 2"A" y 7"B" (25 alumnos)

## Conclusiones

El análisis del libro de texto con el programa de estudio (primera etapa) augura una enseñanza lineal, sin la promoción de la intuición probabilística. Estas limitaciones anuncian una visión incompleta de una cultura matemática básica, más cuando la propuesta institucional debe atender áreas de conocimiento.

El análisis del cuestionario exploratorio aplicado después de la enseñanza (parte de la segunda etapa) muestra falta de comprensión de ideas fundamentales de estocásticos en la solución de cada uno de los reactivos. Al igual que en la propuesta se augura una enseñanza lineal, de los estudiantes se prevee en el mejor de los casos desempeños de aplicación mecánica de algoritmos para la resolución de ejercicios.

Las entrevistas semiestructuradas, parte de la tercera etapa, están en proceso de análisis. Proveerán datos adicionales para profundizar sobre la comprensión de los estudiantes de ideas fundamentales de estocásticos resultante de su enseñanza.

## Referencias bibliográficas

- Cárdenas, H. (1973). *Álgebra Superior*. México: Trillas.
- Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. Barcelona: Paidós
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Holanda: Reidel.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological view on stochastics fundamental ideas. *Educational Studies of Mathematics* 6, 187-205.
- Hogarth, R. (2002). *Educar la intuición. El desarrollo del sexto sentido*. Barcelona: Paidós
- Infante, G. (1991). *Métodos de enfoque interdisciplinario*. México: Trillas.
- Ojeda, A. (2006), Estrategia para un perfil nuevo de docencia: *Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. México: Santillana-Cinvestav del IPN, pp. 195-214.
- UNAM. (1996). *Programa de estudios de la ENP (1996, clave 1712)*. México: UNAM.

Rivera, S. (2007). Enseñanza y comprensión de Ideas Fundamentales de Estocásticos en el nivel medio superior. *XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Red Cimates, Yucatán. México, p.50.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. EUA: Springer.