UN ESTUDIO DE LA COVARIACIÓN CON PROFESORES UNIVERSITARIOS USANDO TECNOLOGÍA

María del Socorro Valero Cázarez, Ma. Guadalupe Barba Sandoval, María Paulina Ventura Regalado, Alejandro Del Castillo Escobedo, María José Torres Jaramillo
CBTIS 164 México
paraklet@prodigy.net.mx
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio

Resumen. *En el presente estudio se analizaron las producciones de 13 profesores universitarios relacionadas con 4 enunciados verbales referidos a la rapidez de variación, antes y después de que desarrollaran actividades de laboratorio usando tecnología de calculadoras graficadoras y sensores de parámetros físicos diversos para obtener y analizar, gráficas cartesianas generadas en tiempo real, durante un curso de 30 horas. El objetivo de esta experiencia fue dotar a los docentes universitarios de elementos que les permitieran resignificar los contenidos asociados al análisis gráfico de funciones, en términos del cambio y la variación tomando en cuenta que, al estudiar diferentes fenómenos físicos, se confrontan relaciones entre los sentidos corporales y los sistemas de representación. Buscamos, bajo un acercamiento fenomenológico del cálculo, aproximarnos a las intuiciones y vivencias cotidianas de los participantes.*
Palabras clave: funciones, tecnología digital, corporización, razonamiento covariacional

Introducción

La llegada de un desarrollo tecnológico no sólo provoca expectativas o miedos desmedidos; sobre todo, plantea retos al maestro, a la escuela y al sistema educativo para su efectiva incorporación al aula porque, por más benéfica que sea esta nueva tecnología para la enseñanza, esencialmente implica una transformación de la práctica docente, de la organización escolar e incluso de las políticas educativas (Bonilla, 2006).

Sobre la incidencia de las llamadas tecnologías de la información, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) declara que el currículo de matemáticas debe incorporar la tecnología educativa en pro de un aprendizaje más efectivo y el desarrollo de habilidades por parte del estudiante. Sin embargo, los problemas que genera el uso creativo de la tecnología en la enseñanza de la matemática son diversos. Guin y Trouche (1998) mencionan que, a pesar de que una gran mayoría de estudiantes del ciclo secundario en Francia (edades entre 14 y 17 años) cuentan con una calculadora graficadora, solamente alrededor del 15% de los profesores de enseñanza media la utilizan en el salón de clases. Los mismos autores señalan que en Francia, la actividad de aprender a leer gráficas no está en el currículum y que los alumnos deben adquirir esa habilidad fuera del aula de matemáticas.

Por otra parte, también se han reportado algunas dificultades que los profesores de matemáticas tienen respecto del análisis de funciones. Hitt (1996) da cuenta de los resultados de una investigación realizada con 30 profesores de matemáticas de enseñanza media a quienes se les aplicaron 14 cuestionarios, que tenía como objetivo identificar las dificultades que presentaban en la articulación de diferentes sistemas semióticos de representación del concepto de función y para identificar los errores en el uso de tales sistemas y las repercusiones en la enseñanza. En los resultados obtenidos, el autor identificó la presencia de una concepción alternativa en los profesores, denominada *traslación icónica* (Monk, 1992) que les llevó a relacionar la forma continua del trazo de la gráfica con la forma de un recipiente, encontrando que la forma de la gráfica y no el estudio analítico de la información contenida en ella, determinó la forma del recipiente.

En el presente estudio damos a conocer los resultados que obtuvimos con un grupo de 13 profesores universitarios después de que ellos desarrollaron algunas actividades relativas al estudio del concepto de función usando calculadoras graficadoras y sensores digitales de diferentes parámetros físicos y en donde la atención se centró en las relaciones de covariación presentes en las gráficas de funciones.

Referentes del estudio

De acuerdo a Moreno y Waldegg (2005) aunque son las capacidades cognitivas superiores (modelar, interpretar, etc.) todavía privativas del ser humano las que valoramos en las instituciones escolares, seguimos enfatizando las destrezas computacionales sin reconocer que esas destrezas son propias de una "tecnología invisible" y no características de un pensamiento matemático profundo. De allí que las nuevas tecnologías, que todavía no se han vuelto invisibles y que permiten que ciertos cálculos se realicen pulsando una tecla, desafían nuestras concepciones tradicionales sobre lo que constituye el aprendizaje matemático.

Para Tall (2002), corporizar se refiere a construir conocimiento fundamentalmente sobre la percepción sensorial, en oposición a la operación simbólica y a la deducción lógica. Una aproximación corporizada del cálculo, se centra en las ideas perceptuales, previo a la introducción del simbolismo. Este investigador categoriza los modos de representación en tres formas distintas de operación:

- Corporizado. Basado en las percepciones humanas y en acciones, en un contexto del mundo real incluyendo, pero no limitado, a aspectos visuales y representacionales.
- Simbólico-Proceptual. Combinación del rol de los símbolos en aritmética, álgebra y cálculo simbólico, basado en la teoría de que estos símbolos actúan dualmente como proceso y como concepto (procepto).
- Formal-Axiomático. Un acercamiento formal que parte de axiomas y hace deducciones lógicas para probar teoremas.

El mundo corporizado es el modo humano fundamental de operación basado en la percepción y en la acción. El mundo simbólico-proceptual es un mundo de procesamiento simbólico matemático, y el mundo formal-axiomático implica el cambio adicional al interior del formalismo que ha probado ser tan difícil para muchos de nuestros estudiantes. Con relación al uso de las herramientas computacionales en la enseñanza de la matemática, Balacheff y Kaput (1996) han señalado que su mayor impacto es de carácter epistemológico, refiriéndose con ello al hecho de que estas herramientas han generado un nuevo realismo matemático.

Otro elemento fundamental de nuestro trabajo se relaciona con el desarrollo de razonamiento covariacional, denominación de las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atiende a las formas en las que ellas cambian entre sí (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002). Estos autores asumen que las imágenes de la covariación son desarrollables en el sentido piagetiano es decir, las imágenes de la covariación pueden ser definidas por nivel y los niveles emergen en una sucesión ordenada: nivel 1, coordinación; nivel 2, dirección; nivel 3, coordinación cuantitativa; nivel 4, razón promedio; nivel 5, razón instantánea.

Actividades de aprendizaje con calculadora graficadora y sensores

Las 11 actividades puestas en escena en este proyecto, están referidas al tema del Análisis de Funciones, cuyo estudio se aborda en un curso de Cálculo tradicional, el cual es trabajado principalmente en el registro algebraico. En contraste, a través de nuestra propuesta buscamos resignificar el análisis de funciones a través del desarrollo de experimentos de la física utilizando la calculadora graficadora TI-84 plus, el sensor CBR2, el sensor de fuerza Vernier Dual Force, y el sensor de sonido Microphone Vernier destacando, principalmente en las gráficas, los elementos del cambio y la variación presentes en cada una de ellas buscando desarrollar ideas variacionales en los participantes tomando en cuenta que esta estrategia ofrece ricas oportunidades pedagógicas para el desarrollo del razonamiento covariacional de los estudiantes (Carlson, 2002). El trabajo en general, se basó en las intuiciones y vivencias de los participantes mediante un acercamiento fenomenológico por lo que se atendió más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto per se.

Elementos metodológicos

La presente investigación corresponde a un estudio pre–post, predominantemente cualitativo con un componente cuantitativo (Hernández, Fernández, Baptista, 1995) en razón de que nuestra atención se dirigió hacia aspectos cualitativos de las producciones de los profesores. El curso de 30 horas se llevó a cabo en enero de 2009 y se impartió a 13 profesores del Instituto Tecnológico de Reynosa perteneciente a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica de la SEP ubicado al oriente de la zona fronteriza México-Estados Unidos del estado de Tamaulipas y estuvo dirigido por tres de los investigadores.

Instrumento diagnóstico

Fue aplicado antes y después de poner en escena las actividades. Este instrumento de diagnóstico consistió de una colección de 4 enunciados verbales acerca de la rapidez de variación (Dolores, 2007) que requirió poner en juego los cuatro niveles de razonamiento covariacional: coordinación, dirección, coordinación cuantitativa y razón promedio (Carlson, 2002).

1. *Desde una misma posición de una pista olímpica, inician su carrera los atletas A y B. Después de un tiempo determinado el atleta A alcanza una rapidez de 2m/s y el atleta B de 5 m/s. Así se mantiene durante una vuelta entera a la pista. Represente esta situación gráficamente.*

2. *Una niña crece más rápidamente que un niño durante cierto tiempo. Después la rapidez de crecimiento se invierte, es decir, el niño crece más rápido que la niña, en un periodo subsiguiente. Dibuje una gráfica que represente tal situación.*
3. *Un automóvil parte del reposo y alcanza una rapidez de 100 km/h en 20 segundos. Haga una representación gráfica de esta situación.*
4. *Dos recipientes que contienen igual cantidad de agua y aceite respectivamente, se calientan por un periodo determinado de tiempo hasta alcanzar su punto de ebullición. El agua hirvió más rápidamente que el aceite. Construye la o las gráficas que representen esta descripción.*

La valoración de las producciones de los profesores fue analizada bajo la perspectiva cualitativa, pues se pretendió indagar aspectos relativos a las concepciones de los participantes respecto de la representación gráfica de la rapidez de variación.

Discusión de los resultados

Tabla 1. Resultados ejercicio 1

Desde una misma posición …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó				
2	Representación pictórica (dibujo)	6	46.2		
3	Localizan un par de puntos en el plano cartesiano	1	7.7		
4	Construyeron una gráfica de barras				
5	Construyeron una gráfica de pastel				
6	Construyeron dos segmentos de recta con pendiente aceptable	4	30.8	6	46.2
7	Construyeron dos curvas crecientes	1	7.7	1	7.7
8	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)	1	7.7	6	46.2

Los tipos de gráficas del 1 al 5 indican que los profesores no se encontraban ni en el nivel de coordinación de la clasificación de Carlson de desarrollo de razonamiento covariacional y aquí observamos que más de un 50% de los profesores evidenciaron esta situación en el pretest. En el postest ya no se identificó caso alguno en esta condición. El tipo 6 corresponde al nivel 2, de dirección, es decir, alcanzaron a identificar que, cuando crece, la posición de los corredores también aumenta la posición, aunque con razón de cambio constante. Aquí ubicamos en el pretest a la tercera parte de la población; en el postest, observamos un cambio importante en la dirección deseada. El tipo de gráfica 7, denota que el estudiante se ubica en el nivel de coordinación cuantitativa, pues hay conciencia de que, a medida que el tiempo aumenta, la posición, va aumentando la razón de cambio promedio. En este nivel no se observó cambio. Por último, en el pretest solo uno de los participantes fue capaz de construir una gráfica que correspondiera al enunciado del problema, en tanto que en el postest casi el 50% de los participantes construyeron una gráfica que denota el nivel de razón instantánea de cambio, es decir, en su gráfica se puede observar que existe conciencia de que, a medida que el tiempo aumenta, la posición de ambos atletas también va aumentando respecto del punto de referencia con una razón de cambio instantánea variable.

Tabla 2. Resultados ejercicio 2

Una niña crece más rápidamente que …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó	1	**7.7**		
2	Representación pictórica (dibujo)	1	7.7		
3	Localizan un par de puntos en el plano cartesiano	1	7.7		
4	Construyeron una gráfica de barras	2	15.4		
5	Construyeron una gráfica de pastel				
6	Construyeron dos segmentos de recta con pendiente aceptable	1	7.7	1	7.7
7	Construyeron dos curvas crecientes				
8	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)	7	53.8	12	92.3

En las gráficas que los profesores construyeron en este problema, encontramos que en el pretest, cerca de un 40% denota que no existe razonamiento covariacional y más de la mitad construyeron gráficas que corresponde en la totalidad a lo esperado. Estos números se modifican en el postest de modo que casi el 100% de la población, construyó gráficas que incluyen elementos que corresponden al más alto nivel de razonamiento covariacional.

Tabla 3. Resultados ejercicio 3

Un automóvil parte del reposo y …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó	1	7.7		
2	Representación pictórica (dibujo)	5	38.5		
3	Localiza un punto en el plano cartesiano				
4	Construyeron una gráfica de barras				
5	Construyeron una gráfica de pastel				
6	Construyeron un segmentos de recta con pendiente aceptable	1	7.7	4	30.8
7	Construyeron una curva creciente	1	7.7		
8	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)	5	38.5	9	69.2

En este ejercicio casi la mitad de los participantes en el pretest, construyen gráficas en donde no hay indicios de razonamiento covariacional. En proporción menor identificamos profesores cuyas construcciones corresponden a lo esperado. En contraste, en el postest, un 30% construyen gráficas cuyos elementos denotan avance en su nivel de R. C. y un 70% construyen gráficas que corresponden completamente a lo esperado.

Tabla 4. Resultados ejercicio 4

Dos recipientes que contienen igual …		Pretest		Postest	
	Tipos de Respuestas	No. de Profesores	%	No. de Profesores	%
1	No contestó	1	7.7	1	7.7
2	Dos curvas decrecientes Volumen vs. Tiempo			1	7.7

3	Representación pictórica (dibujo)	3	23.1		
4	Localizan un par de puntos en el plano cartesiano				
5	Construyeron una gráfica de barras				
6	Construyeron una gráfica de pastel				
7	Construyeron dos segmentos de recta con pendiente aceptable	4	30.8	4	30.8
8	Construyeron dos curvas crecientes	5	38.5	7	53.8
9	Todos los aspectos de la gráfica fueron aceptables (ya sea en gráfica $s(t)$ vs. t o $v(t)$ vs. t)				

Por último, los resultados del ejercicio 4, muestran que éste supuso un reto mayor para los participantes pues, si bien en el pretest más de un 30% de ellos construyeron gráficas que denotan un 0% de razonamiento covariacional, y en el postest solo uno de ellos se sigue manteniendo en este nivel, solo uno de los profesores realizó una construcción que coincidió completamente con lo esperado. Más de un 80% de la población construyeron gráficos que evidencian la existencia de razonamiento covariacional en los niveles de dirección y coordinación.

Conclusiones

Tomando en cuenta que el profesor universitario tradicional del sistema educativo público mexicano es proclive a desarrollar en los estudiantes mecanizaciones usando excesivamente el método expositivo y poco métodos participativos, omitiendo prácticamente el uso de los medios electrónicos, basándose en programas de estudios en donde predomina un enfoque abstracto con escasa relación con los fenómenos de la variación física (Dolores, 2000), consideramos fundamental la realización de cursos-taller como el que aquí se reporta en donde, aprovechando los recursos expresivos que las tecnologías digitales ofrecen, el profesor pueda establecer el vínculo, entre nociones fundamentales del cálculo y algunos fenómenos físicos en donde se encuentran presentes los elementos que dieron origen a los mismos y que posibiliten el desarrollo de ideas variacionales.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. y Kaput J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics, in: A. Bishop et al. (eds.) *International Handbook in Mathematics Education* (pp.469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bonilla, E. (2006). Tecnología y Cognición. Prefacio del Libro: *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula*. Ma. Teresa Rojano Ceballos (coord.). Dirección General de Materiales de la Subsecretaría de Educación Básica, de la SEP.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5, pp. 352–378

Dolores, C. (2000). La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Academia*; Vol. 2 No.20, Universidad Autónoma de Sinaloa

Dolores, C. (2007). Tipos de representaciones gráficas sobre la rapidez de la variación en *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática* Educativa, 359-371

Guin, D. y Trouche L. (1998). Environments "Calculatrice symbolique": Necessité d'une socialization des processus d'instrumentation. Evolution des comportements d'eleves au cours de ces processu. Actes du Colloque Francophone Européen Calculatrices symboliques et géometriques dans l'enseignement des mathématics (Dominique Guin Ed.). IREM de Montpellier, France.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (1997). Metodología de la investigación. México: Mc Graw-Hill. (pág. 20)

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas, epistemológicos y didácticos; Ed. Fernando Hitt, *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25 (pp. 175–193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2006). Tecnología y Cognición, Postcriptum. Capítulo IX. En: Rojano, T. (Ed.). *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con tecnología*. SEP-OCDE, México.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). The Use of Technology in the Learning and Teaching of Mathematics. Disponible en: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id_6 [2006, 11 de febrero]

Tall, D. (2002). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. En L. M. Carvalho and L. C. Guimarães, *Historia e Tecnologia no Ensino da Matemática*, Vol. 1, pp. 1 – 28, Rio de Janeiro, Brasil.