View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

DESARROLLO DE APLICACIONES INFORMÁTICAS CON MODELACIÓN MATEMÁTICA ORIENTADAS AL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO INTEGRAL A NIVEL LICENCIATURA

Víctor Guevara Basaldúa, Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro México
victorguevara21@hotmail.com, vil@uaq.mx
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Superior

Resumen. *En este documento presentamos una manera de trabajar con la definición del Cálculo Integral, definición a través de Sumas de Riemann en la cual se utilizan, por ejemplo, Límites y Sumatorias. Lo que pretendemos con esta forma de ver el Cálculo Infinitesimal, es diseñar algunas actividades dentro de un software interactivo (que también diseñaremos) que contenga los elementos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia tan importante a nivel licenciatura. La modelación matemática y la visualización son algunos de esos elementos y, la intención con el software, es incrementar la aplicabilidad de éstos, logrando así un mejor entendimiento de los conceptos inmersos en dicha definición. Mostramos aquí un acercamiento de lo que con el software los alumnos llegar podrían llegar a realizar una vez que éste estuviese debidamente terminado. Dicho trabajo es un proyecto de maestría que se encuentra a la mitad de su desarrollo, pero que deseamos terminar y aplicar para el siguiente ciclo escolar.*
Palabras clave: cálculo integral, modelación matemática, matemática educativa, visualización, software

Introducción

Es bien sabido que en la vida escolar preuniversitaria o universitaria un buen número de dificultades en los estudiantes están asociadas al manejo de los conceptos básicos y no tan básicos del Cálculo diferencial e integral. Se ha probado inclusive que aún aquellos estudiantes que ya han llevado uno o dos cursos de Cálculo muestran serias deficiencias al momento de trabajar con los conceptos inmersos en esta materia: Aparicio (2006 citado en Cabrera y Zaldívar, 2007). Por supuesto que esto trae consigo las consecuencias más lamentables para los estudiantes que intentan un desarrollo personal y profesional dentro de una preparación científica y social importante para su vida. Una de estas consecuencias es la deserción escolar que finalmente termina por cobrar costosas facturas a la sociedad. Por ejemplo, en la UNAM desertan el 30% de los 35, 000 alumnos que ingresan a alguna de las licenciaturas, y por tal motivo la sociedad mexicana pierde 262 millones 500 mil pesos anuales en alumnos que no concluyen su carrera profesional como lo señala Rodríguez (2000 citado en García, 2006). Cabe señalar también que un 25% de alumnos que abandonan la licenciatura, lo hacen por reprobar materias de matemáticas (principalmente Cálculo Diferencial e Integral) en los dos primeros semestres (Aparicio y Ordaz, 2006).

Es claro que existe un problema con la enseñanza de las matemáticas en general, puesto que las estadísticas señalan altos porcentajes del disgusto que esta disciplina causa en la mayoría de los estudiantes. Particularmente en el área del Cálculo a nivel licenciatura los métodos convencionales de enseñanza llevan a los profesores a teñir de algoritmos sus cursos obteniendo poca ganancia cognitiva y repercutiendo directamente en el currículo: Cantoral (1993 citado en Zaldívar, 2006). Además de que el estudio del Cálculo tiende a centrarse en una práctica algorítmica, se intenta desde los inicios, aplicar los tradicionales métodos rigurosos de demostración matemática: Moreno (2005 citado en Cabrera y Zaldívar, 2007). No se reconocen los mecanismos de producción de los conocimientos ni la organización social en el aula, que en conjunto hacen posible tal construcción; es decir, podemos decir que existe una confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar: Cordero (2001 citado en Cabrera y Zaldívar, 2007). Por otra parte, muchas veces la enseñanza del Cálculo es presentada en los salones alejada del mundo en que se desenvuelven o se podrían desenvolver los alumnos.

Consideraciones sobre visualización y modelación matemática

Con el propósito de subsanar los problemas que hemos mencionado anteriormente sobre el aprendizaje y la enseñanza del Cálculo, intentaremos dar una idea general en este apartado sobre lo que deseamos haga nuestro software. Creemos que el trabajo algebraico, algorítmico y operatorio es importante para enseñar Cálculo Integral, sin embargo aquí haremos hincapié en el trabajo con modelación matemática, así como también con la visualización, ya que son elementos que se pueden incluir de manera más sencilla al estar trabajando con el software. De la misma manera que lo señalan Cantoral y Montiel (2001) entendemos a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. Por otro lado, sabemos que la modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Mientras tanto, un modelo matemático de un fenómeno o de una situación es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. Tal y como se señala en Salett y Hein (2004), "el modelo matemático no sólo permite obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías".

Como podemos ver, el significado de estos dos conceptos es muy importante y si se lograsen aplicar tal y como se dice en su definición, sería una gran ganancia, puesto que prácticamente se aprendería muy bien la matemática al mismo tiempo en que ésta se aplicaría para resolver problemas interesantes y más cercanos a la realidad. Precisamente intentaremos plantear algunas actividades en las cuales, con ayuda del software, se puedan resolver situaciones que ayuden al estudiante a comprender nociones sobre las Sumas de Riemann que se ven en la definición de la Integral, todo esto utilizando la visualización y la modelación como herramientas para el aprendizaje.

Algunos ejemplos

Para acercarnos un poco en esto de la modelación matemática veamos los siguientes ejemplos tomados de (Guevara, 2008), los cuales nos indican que cada pregunta sobre un tema o situación puesta en escena es fundamental para llegar a la construcción de un concepto más grande que puede formar parte del aprendizaje significativo sobre la situación señalada.

1. *Determinar la presión sobre una placa triangular sumergida verticalmente en agua y en tal forma que una base del triángulo está al nivel de la superficie del líquido.*

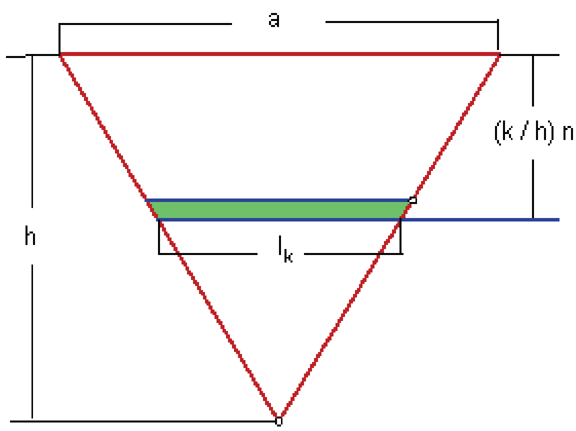

Figura 1

En la figura anterior se muestra una representación de dicha placa y la idea es analizar a lápiz y papel cómo es que se puede encontrar la presión que el agua provoca sobre la placa. Algunos de los pasos que se piden contestar a los alumnos son:

a) Si divides la placa en *n* franjas horizontales de igual ancho. ¿Cuál es el ancho en términos de la altura h y el número de franjas? ¿Podrías plantear alguna expresión para el ancho? ¿Cuál es?

b) Tomando en cuenta que la presión es igual al área de la superficie sumergida por la profundidad de sumergimiento y pensando que las franjas forman rectángulos y no trapecios (como en la Figura 1), encontrar el valor para l_k (la longitud de la franja *k*-ésima.) ¿Qué tienen qué ver para esta encomienda los triángulos ABC y PBQ?

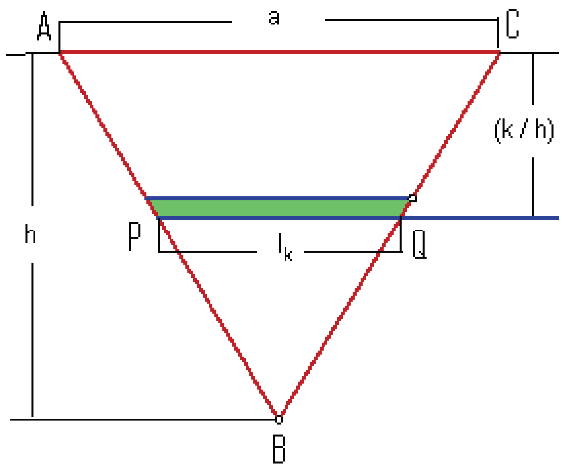

Figura 2

c) ¿Cuánto es el área de la figura “rectangular” sombreada?

d) ¿Cuánto es la presión sobre dicha franja?

La presión total sobre la placa triangular se encuentra sumando las presiones sobre las franjas particulares:

$$P \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}(1-\frac{k}{n})k$$

O bien

$$P \approx \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

e) ¿Qué significados tienen las expresiones anteriores?

f) Utilizar los resultados de límites y sumatorias necesarios para concluir que la presión total sobre la placa es

$$P = \frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{3} \qquad \text{O bien} \qquad P = \frac{ah^2}{6}$$

2. *Encontrar el ritmo al que fluye la sangre a través de una arteria.*

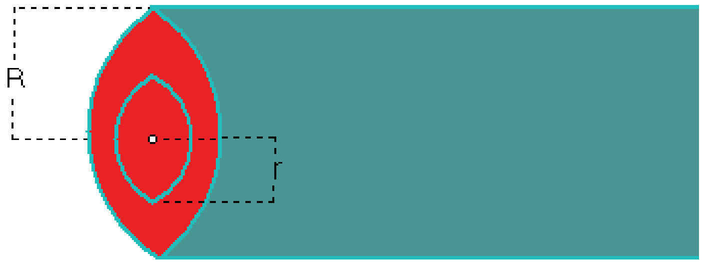

Figura 3

La velocidad de la sangre en una arteria es función de la distancia al eje central de la arteria, es decir, la velocidad de la sangre $(\frac{cm}{s})$ *que está a r cm. del eje central de la arteria es* $S(r) = k(R^2 - r^2)$, *donde R es el radio de la arteria y k es una constante. Ver la siguiente figura (Ley de Poiseville).*

La pregunta que resolveremos paso por paso es ¿con qué ritmo $(\frac{cm^3}{s})$ fluye la sangre a través de la arteria?

a) Si divides el intervalo [0, *R*] en *n* sub-intervalos de igual longitud Δr y te fijas en el sub-intervalo $[r_j, r_{j+1}]$, ¿cuál es el área del anillo comprendido en dicho intervalo? A dicho anillo llámale anillo r_j (Figura 4).

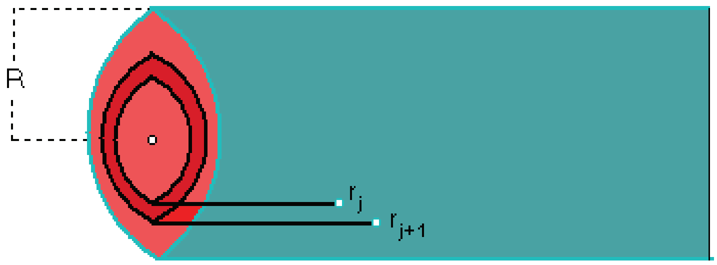

Figura 4

b) ¿Cuál es la velocidad de la sangre en ese anillo, según la Ley de Poiseville?

c) Al multiplicar el área del anillo y la velocidad, encuentras su ritmo, ¿cuánto es el ritmo?

d) Si haces más fina tu partición de [0, *R*], más cerca estás de encontrar el ritmo total en la arteria, esto porque los resultados anteriores son aproximaciones, ¿porqué? Si sumas ahora todos los ritmos de flujo encontrarás el ritmo total de manera exacta. ¿Cuánto es entonces, el ritmo en la arteria?

Cabe notar que estas son algunas de las actividades que forman parte de la tesis de Guevara (2008) y fueron diseñadas para aplicarlas, en un principio, a un grupo de profesores de nivel medio como parte de un diplomado sobre modelación.

Metodología

La manera como se puede trabajar con el software utilizando la modelación y la visualización, por ejemplo para el tema de volúmenes en sólidos de revolución y Sumas de Riemann, la podemos ejemplificar con una actividad como la que sigue.

Se tiene la función $f(x)=\sqrt{x}$ ¿Cuál será el volumen del sólido obtenido al girar la función sobre el eje de las abscisas en el intervalo [1, 3.5]?

Como esta es la pregunta a resolver por el método de Sumas de Riemann y con la ayuda del software, podemos pensar que, cuando se plantea la situación de encontrar el volumen, aún no se han visto con anterioridad los conceptos ni las herramientas necesarias para poder responder la pregunta con más facilidad (podríamos pensar en una clase de introducción en el salón de clase). Por tanto, cada actividad consecuente deberá seguir, cuánto más sea posible, los principios de la modelación y de la visualización para que pueda surgir la construcción del conocimiento sobre el tema de Sumas de Riemann y la Integral Definida de manera más o menos guiada. Algunas de las situaciones siguientes pueden ser: si consideras una partición del intervalo [1, 3.5] en 10 sub-intervalos de la misma longitud, ¿cuáles son los puntos que delimitan a cada uno de los 10 sub-intervalos? ¿Cuál es la distancia entre cada par de puntos (el ancho de cada sub-intervalo)?

¿Cuál es la forma del sólido del cuál debes encontrar el volumen? ¿Podrías hacer un bosquejo? ¿Conoces alguna fórmula para encontrar el volumen de formas como la que se está analizando en esta ocasión?

Si contestaste que no a esta última pregunta, entonces puedes recurrir a las situaciones siguientes:

Elige alguno de los sub-intervalos construidos y construye un cilindro que tenga de altura al ancho de dicho sub-intervalo y que sea parte del volumen que se desea encontrar. ¿Cómo tendrías qué utilizar la función para saber el volumen del cilindro que has de calcular?

Si haces lo mismo (construyes un cilindro) con los demás sub-intervalos, ¿Qué tan cercano estás del volumen que se te pidió calcular?

Estas actividades, las podemos resumir con un algoritmo sencillo que debe seguirse al trabajar con el software. De esta forma el software se apega mucho a las características que debe tener un "bue software", señaladas por Mochón (2006). El algoritmo dice que el estudiante:

1. Decide un intervalo adecuado para encontrar el volumen del sólido.
2. Elige la partición adecuada para dividir uniformemente su intervalo elegido.
3. Calcula el ancho de cada intervalo.
4. Calcula el radio de los discos formados.
5. Calcula el volumen de los cilindros formados.
6. Calcula el volumen aproximado del sólido que construyó.

La interfaz con la que trabajaría el alumno tiene una cara como la siguiente:

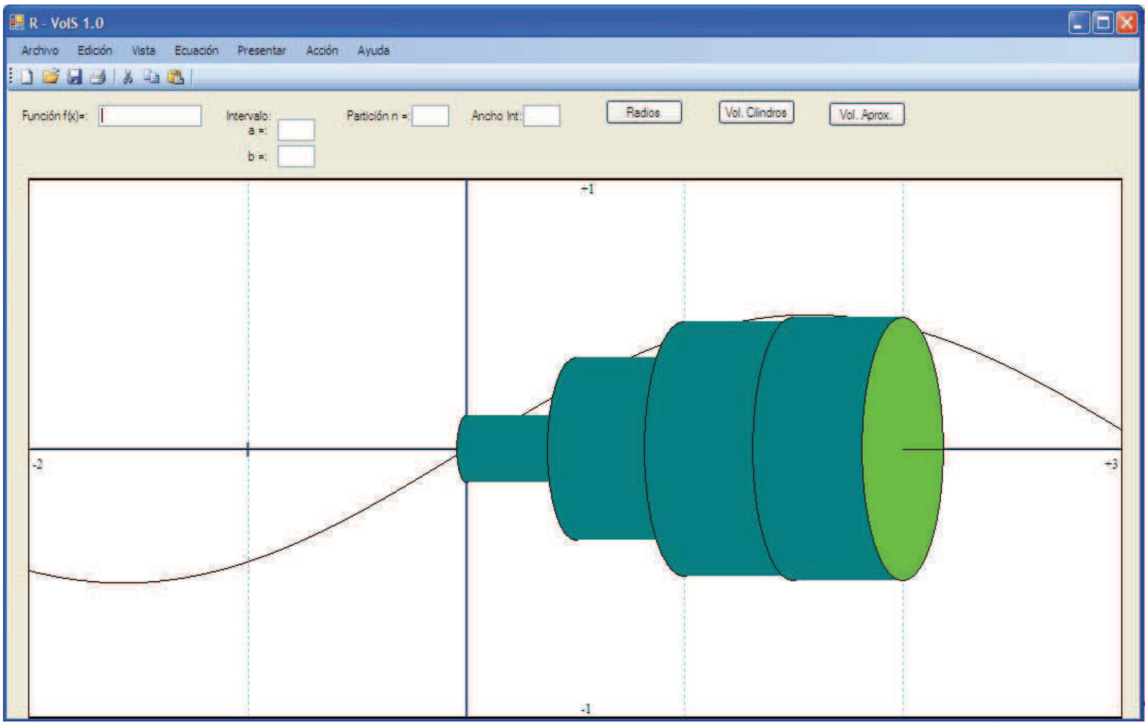

Figura 4

Observamos que con la manipulación tanto de la función como de los mismos cilindros el alumno se percata más fácilmente de los conceptos involucrados en la definición de Riemann, lo cual ayuda enormemente a reducir los problemas concernientes al aprendizaje de los elementos indispensables en esta disciplina.

El procedimiento que un alumno sigue dentro del salón de clases para aprender sobre sólidos de revolución se ve ahora reforzado y más agilizado con la ayuda del software porque le permite visualizar las regiones que forman el volumen, además de que también ayuda a construir cilindros que aproximan al volumen de la región.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., y Ordaz, G. (2006). *Estudio Cualitativo sobre la Reprobación del Cálculo en el área de Ciencia Computacionales y Matemáticas*. X Escuela de Invierno en Matemática Educativa pp. 22-30. Sta. Cruz Tlaxcala (2006)..

Cabrera, L., y Zaldívar, J. (2007). *Formación Didáctica en Cálculo Universitario. Una Propuesta Basada en el Diseño de Actividades como Eje Rector.* XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa pp. 396-407. Mérida, Yucatán

Cantoral, R., y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México: Pearson.

García, E. (2006). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula. Elemento de análisis en la reprobación y rezago del Cálculo.* Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán.México.

Guevara, B. V. (2008). *La Modelación Matemática en la Formación de Profesores de Bachillerato*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Querétaro. México.

Mochón, S. (2006). Avances y hallazgos en la implementación de tecnologías para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. En Filloy, E (Comp), *Matemática educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual* (pp. 101 – 121), México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN y Santillana.

Salett, B. M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16 (2)*, 105-125.

Zaldívar, J. (2006). *Un estudio sobre elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.