

## EL USO DE LA TECNOLOGÍA COMO INSTRUMENTO FACILITADOR EN EL DESARROLLO DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS

Javier Barrera Ángeles; Tulio Rafael Amaya de Armas; Petra Téllez Reyes

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

México

Institución Educativa Madre Amalia. Sincelejo

Colombia

Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 8

México

jbarrera12@hotmail.com, tuama1@hotmail.com, ptr405@hotmail.com

Campo de investigación: Resolución de problemas

Nivel: Superior

**Resumen.** *El presente trabajo muestra resultados de la investigación cuyo objetivo fue estudiar y documentar de qué manera el uso de la tecnología facilita la actividad matemática en estudiantes de nivel superior, en un contexto de resolución de problemas con estudiantes de nivel superior (18-20 años). Considerando el uso de la tecnología como la herramienta que permite el desarrollo de habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos matemáticos.*

**Palabras clave:** representación, visualización, estrategias, resolución de problemas, procesos matemáticos

### Introducción

La incorporación de los recursos tecnológicos a la enseñanza de las matemáticas fortalece la investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas. En este sentido, esta investigación plantea estudiar y documentar de qué manera el uso de estos recursos facilita la actividad matemática en estudiantes de nivel superior en un contexto de resolución de problemas. Se cree que el uso de la tecnología permite desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes cuando estos manipulan objetos matemáticos. Es tal su aceptación que instituciones educativas de diversos países promueven su uso. Además, instituciones no gubernamentales como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos. Existen investigaciones que abordan el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, Viveros y Sacristán (2002) usan la tecnología para comparar el concepto de continuidad y diferenciabilidad. En este sentido se plantean tres problemas al estudiante, los cuales debe resolver primero de manera tradicional y después usando la tecnología. El análisis de los resultados muestra que cuando se resuelven problemas con lápiz y papel, no siempre se reflexiona sobre los procedimientos efectuados al momento de resolver problemas. Sin embargo, existen algunos casos en los cuales si se reflexiona sobre las respuestas a través de la visualización y la

interrelación de los conceptos u objetos matemáticos. Por último, es evidente que el uso de las herramientas tecnológicas sí favorece en buena medida el desarrollo de habilidades en estudiantes al momento de resolver problemas. Además de potencializar la generalización.

### **Presentación del tema y objetivos**

Esta investigación se enmarca dentro del contexto etnográfico, es decir, en él se intenta descubrir y describir las acciones de los estudiantes dentro de la interacción con la resolución de problemas, con y sin el uso de la tecnología. Así, el objetivo de esta investigación es estudiar y documentar de qué manera el uso de la tecnología facilita la actividad matemática en estudiantes de nivel superior.

### **Marco teórico**

Reconocemos la importancia para esta investigación, de los recursos tecnológicos como las TIC's (tecnologías de la información) o tecnología CAS (Computer Algebra Systema); por su incidencia en el aprendizaje, en forma individual de los alumnos, además, que la tecnología, no sólo ha revolucionado el conocimiento matemático, abriendo caminos a la investigación matemática, por la importancia de sus aplicaciones al desarrollo científico, sino que los estudios adelantados hasta el momento muestran evidencias de su impacto cognitivo en el aprendizaje, dado el poder expresivo que las herramientas computacionales poseen, que "las sociedades contemporáneas dependen, para su desarrollo, de sus capacidades para producir, aplicar y transmitir el conocimiento científico y tecnológico" (MEN, 2002, 12), y que a pesar de los esfuerzos que se han hecho por diversas instituciones de muchos países, sigue habiendo dificultad para la enseñanza de conceptos básicos del cálculo, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones estarían muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas (Godino, et al., 2005). De esta forma, la disponibilidad de los recursos tecnológicos, destinados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es abundante; así, lo demuestran investigaciones recientes, además, instituciones no gubernamentales como el NCTM (National of Council of Teachers of

Mathematics) promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos; esta situación plantea un reto a profesores e investigadores en educación matemática ya que la incorporación de estos recursos en el estudio de las matemáticas no es inmediata y requiere del manejo de situaciones con el uso de los recursos tecnológicos para desarrollar al máximo las capacidades y habilidades de pensamiento matemático. Por otra parte, Kieran (2006) menciona que la disponibilidad de la tecnología CAS (Computer Algebra Systems) en la escuela, vendrá con el desarrollo de la estructura teórica para interpretar cómo la tecnología media como un instrumento en el desarrollo del pensamiento matemático. Ambos tienen que contribuir a un reciente incremento de atención para la interacción entre la tecnología y la teoría. En la actualidad, pueden usarse herramientas tecnológicas para resolver problemas que en otros tiempos sólo quedaban en la imaginación. En este sentido, las herramientas tecnológicas han servido para mejorar el aprendizaje y apoyar la enseñanza de las matemáticas. Esta práctica es cada vez más común en instituciones de educación superior (Figueras, 2005).

Viveros y Sacristán (2002), estudiaron la relación entre el concepto de continuidad y diferenciabilidad, cuyo objetivo principal se centró en analizar la influencia y el uso de los diferentes registros de representación durante el proceso de determinación de la continuidad y diferenciabilidad de una función a través del álgebra o aproximación gráfica. Encontraron que los estudiantes usan ambos registros, el visual y el algebraico, pero predomina más el algebraico, y las respuestas de los estudiantes se enfocaron sobre el análisis de las características de solamente uno de los registros. Además, cuando determinaron la diferenciabilidad de una función, se encontró que los estudiantes no usaron el registro gráfico, aún así, la función fue dada a través de su gráfica. También observaron que existe una falta de entendimiento de las características visuales que ayuden a determinar la diferenciabilidad de una función, y un exceso de confianza sobre la continuidad o no continuidad de la función para determinar la diferenciabilidad.

Contreras, et al., (2007) encontraron que los estudiantes cometen errores importantes en sus respuestas a las cuestiones planteadas en una prueba de evaluación sobre límites, continuidad y derivadas. Este hecho, nos lleva a afirmar que el uso de dicho entorno informático no garantiza unos resultados satisfactorios, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función. Por otra parte, estos resultados apoyan la conjetura de

que determinados usos del ordenador aportan muy pocos elementos de transformación a la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario.

Sánchez, Butto, Orendain y Ursini (2004), investigaron sobre el comportamiento de los estudiantes cuando se usa la tecnología para apoyar la enseñanza de las matemáticas. Los resultados muestran que, desde la perspectiva de los docentes, el uso de la tecnología en la clase de matemáticas modifica la mayoría de estos aspectos y estos cambios son distintos en varones y en mujeres. Por otra parte, la importancia del uso de herramientas tecnológicas es la interactividad dada por la relación sujeto-herramienta tecnológica. Esta relación permite observar ciertos patrones de conducta en el sujeto cuando interactúa con la herramienta tecnológica. En este sentido pueden apreciarse dos situaciones: la primera tiene que ver con las representaciones estáticas o inertes; una característica esencial de este punto, es que las acciones de los estudiantes no reaccionan con las representaciones de los objetos matemáticos. La segunda situación tiene que ver con un medio interactivo, en el cual los estudiantes reciben respuesta a sus acciones (Estrada, 2002).

La visualización de los registros de representación juega un rol muy importante en el estudio de los procesos matemáticos. En este sentido, la visualización es definida como una relación entre imágenes (Solano y Presmeg, 1995), estos autores mencionan que para poder visualizar hay necesidad de crear muchas imágenes; de esta manera, los estudiantes deben crear muchas imágenes para después usarlas en los procesos matemáticos para dar sentido a las situaciones geométricas. Además, la visualización y la imaginación juegan un papel importante en los procesos usados en la resolución de problemas matemáticos.

### **Metodología**

Se trabajo con 30 es estudiantes de nivel superior (18-20), el trabajo fue dividido en tres actividades básicas: 1) se preparo durante 4 meses a los estudiantes en un curso tradicional de cálculo diferencial (límites, funciones, continuidad, derivada, etc.); 2) se adiestro a los estudiantes en el manejo de la herramienta tecnológica para cálculo (calculadoras TI-85) durante un periodo de un mes. En esta parte se priorizaron actividades sobre limites y funciones con el uso de la herramienta tecnológica; 3) finalmente se diseñaron las actividades a través de la Academia. La

puesta en escena de las actividades fue desarrollada en tres momentos, en primer lugar se aplico a los estudiantes las actividades diseñadas, mismas que resolvieron a lápiz y papel; en segundo lugar se aplico la misma actividad pero con el uso de la herramienta tecnológica y por ultimo, se hizo una selección de respuestas para el análisis de resultados.

## Análisis de resultados

### Análisis de la actividad 1.

En la primera actividad se les pidió a los estudiantes trazar la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ , indicando las asíntotas horizontales y verticales si existen, e indicar el dominio, rango y el tipo de discontinuidad especificando los valores de “x” en donde hay dicha discontinuidad. Al respecto, existe una variedad de argumentos en cada una de las respuestas, por ejemplo, un estudiante describió lo siguiente: “el primer paso a simple vista me di cuenta de que es una función cuadrática, por lo que llego a mi mente la representación de esa grafica, y por ser cuadrática pueden existir términos positivos y negativos que al sustituir hagan una indeterminación”. Otro estudiante usa el registro de tabulación como estrategia, y comenta, “luego después de conocer el dominio, tabulo asignándole valores validos a “x” para trazar la grafica”; este caso ilustra muchas de las respuestas de los estudiantes quienes no reflexionan sobre los resultados obtenidos, ya que al trazar la grafica solo se limitan a dibujar puntos y unirlos con segmentos de recta, dando como resultado gráficos completamente diferentes a los que corresponde la respuesta correcta. Por otra parte, existen respuestas que consideran como estrategia el uso reflexivo de los conceptos de cálculo, por ejemplo, un estudiante establece la siguiente estrategia: equivalencia  $\frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{P}{Q}$ ,

$D = \mathbb{R} - \{2, -2\}$ , la parte P puede tomar todos los valores  $\mathbb{R}$  pero la Q no, así que definimos el dominio donde  $Q \neq 0$ . Y como  $f(-x) = f(x)$  la función es par y por lo tanto es simétrica al eje de las “y”.

Para hallar las raíces se hace  $\frac{x^2}{x^2 - 4} = 0$ , por obvias razones las asíntotas verticales están en 2 y -2.

Ahora se calcula las asíntotas horizontales  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{\infty} = 0$ , Por ultimo

tomamos todos los elementos encontrados y graficamos. Hasta aquí hemos ilustrado tres casos

representativos sobre las respuestas más comunes que los estudiantes ofrecen al intentar resolver el problema planteado.

#### Análisis de las actividades 2a y 2b.

En esta actividad se les pidió a los estudiantes calcular los siguientes límites, 2a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}2x}{x}}$ , 2b.

$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \right)$ . Para el desarrollo de Esta actividad, los estudiantes utilizaron diferentes

estrategias, por ejemplo, un estudiante escribió  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen}2x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \csc 2x$ ;

esta respuesta muestra una simple operación algebraica sobre la cual el estudiante no reflexiona en cuanto a cual debe ser el resultado correcto, ya que solo se queda planteado y sin resolver. Algunos otros intentos para resolver este problema tienen que ver con el uso de las identidades

trigonométricas. Por ejemplo,  $\frac{1}{\frac{\text{sen}2A}{x}} = \frac{x}{\text{sen}2A} = \frac{x}{2\text{sen}x \cos x} = \frac{0}{0}$ ". Esta segunda respuesta da

evidencia de que el estudiante carece de una actitud reflexiva en cuanto a los resultados que obtiene al intentar resolver ciertos problemas matemáticos. Por ultimo, en la actividad 2b, algunas de las respuestas correctas están basadas en la estrategia de la racionalización (procedimientos algebraicos), y al igual que en los casos anteriores, los resultados no muestran un entendimiento de los procesos matemáticos desarrollados, tan es así que solo se dejan guiar por los resultados, ya sean numéricos o algebraicos que obtienen, sin importar si estos son correctas.

#### Análisis de las actividades con uso de tecnología.

En la actividad 1, podemos decir que las respuestas de los estudiantes fueron de manera inmediata, debido a la visualización de la grafica y las aproximaciones que el equipo les permitía hacer. Un aspecto importante en las respuestas de los estudiantes tiene que ver con las distintas relaciones que hicieron a través de la visualización grafica, es decir, lograron entender que conceptos como el dominio, rango, continuidad, asíntotas verticales y horizontales y límites guardan una relación estrecha en la construcción de una grafica y que a su vez, esta grafica

describe un problema. Algunos de los comentarios fueron “es mas fácil debido a que el SUM por nos permite precisar sobre la respuesta”. Otro aspecto importante que se observo fue el hecho de que lograron visualizar a través de varios ejemplos que se puede generalizar a otro tipo de funciones. En segundo lugar (2a, 2b), los estudiantes introdujeron las funciones a la calculadora y mediante la manipulación de esta y la visualización grafica, fue como lograron dar respuesta a la pregunta planteada de manera correcta, aunque cabe decir que en algunos casos no hubo una visualización adecuada, lo cual les llevo a dar respuestas incorrectas.

### Conclusiones

Es conveniente mencionar tres aspectos importantes de esta investigación, en primer lugar los estudiantes no reflexionan sobre los procesos que realizan en la solución de los problemas cuando trabajan a lápiz y papel. Es decir, realizan operaciones numéricas y algebraicas sin analizar si lo que hacen es correcto o no; en segundo lugar existen algunos casos en que los estudiantes analizan y reflexiona sobre el desarrollo de los procesos a través de la relación de los conceptos. Por ultimo, el uso de la tecnología facilita el desarrollo de habilidades tales como la visualización y la relación.

### Referencias bibliográficas

Contreras, E. (2007). Aplicación del programa matemática a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. México: Dirección General de Investigación.

Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos en la formación del profesorado. Recuperado el 20 de octubre del sitio web: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/02.estrada.pdf>

Figueras, O. (2005). Atrapados en la explosión del uso de las tecnologías de la información y comunicación, Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación, Matemática SEIEM, p. 6-16 Universidad de Córdoba (España).

Godino, et al. (2005). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. IX Simposio de la SEIEM, Córdoba (España).

Kieran, K. (2006). Reconciling factorizations made with CAS and with paper-and-pencil: the power of confronting two media, *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (2), 473-480. Prague, Czech Republic

MEN (Ministerio de Educación Nacional). (2002). Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas. Proyecto de incorporación de nuevas tecnologías al currículo de Matemáticas de la educación media de Colombia. Bogotá, Colombia.

Sánchez, G. Butto, C. Orendain, M & Ursini, S. (2004). El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 22(3), 409-424

Solano A. & Presmeg C. (1995). Visualization as a relation of images, *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* 3(19), 66-71. Universidad Federal de Pernambuco, Brazil

Viveros, K. & Sacristán, A. (2002) "College Students' Conceptual Links between the Continuity and the Differentiability of a Function." En Mewborn, D.S et al. (eds) *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp.353-363). Athens, Georgia: ERIC Clearinghouse on Science, Mathematics and Environmental Education