SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS DE PROBLEMAS DE REDES ELÉCTRICAS

Pedro Castañeda Porras, Pedro Fernández de Córdoba, Arely Quintero Silverio, Eugenio Hernández Vargas
Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oca" (Cuba)
Universidad Politécnica de Valencia (España)
pcasta@mat.upr.edu.cu, arelys@mat.upr.edu.cu, eugenio@mat.upr.edu.cu, pfernandez@mat.upr.es

Resumen. En ingeniería, sobre todo en Telecomunicaciones y Electrónica, es una necesidad modelar problemas de circuitos, convirtiéndose esto en una herramienta invaluable. El estudio de las ecuaciones diferenciales propone estrategias que conducen a entender mejor la modelación por parte de los estudiantes. La construcción de la formulación matemática requiere de cierta habilidad, imaginación y evaluación objetiva. Compartimos el criterio de Judson (1997), que plantea lo importante de propiciar la transferencia de los conocimientos a situaciones relacionadas con la solución de problemas del ejercicio de su profesión. De ahí lo importante de enseñar ecuaciones diferenciales. En este trabajo expondremos la resolución de un problema sobre redes eléctricas, que se modela mediante sistemas de ecuaciones diferenciales. Se plantea una metodología para obtener el modelo que represente lo más fielmente la realidad, lo que propicia llegar de forma acertada a la respuesta deseada.

Palabras clave: sistema de ecuaciones diferenciales, modelo

Abstract. In engineering, mainly in Telecommunications and Electronic, it is a necessity to represent problems of circuits, thus this becomes a powerful tool. The study of the differential equations presents strategies that lead to the better understanding of the models by the students. The construction of the mathematical formulation requires of certain ability, imagination and objective evaluation. We share the Judson (1997) criterion that outlines the importance of helping with the transference from the knowledge to situations related with the solution of problems related to the exercise of a profession. That is why it is important to teach differential equations. In this work we will expose the experience of problems about electric nets that are modeled by systems of differential equations. A methodology is shown to obtain the pattern that represents the more faithfully the reality, what propitiates the arrival to the wanted answer.

Key words: system of differential equations, model

El proceso de imitar la realidad mediante lenguaje matemático se conoce como modelación matemática. La experiencia que abordamos trata sobre el modelado matemático en la carrera de ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica. Estas ideas se discuten en reuniones de año donde intervienen profesores de las asignaturas Álgebra Lineal, Series y Ecuaciones Diferenciales, Circuitos Eléctricos I y Física I de la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica en la Universidad de Pinar del Río, Cuba.

Este trabajo se sustenta en el perfeccionamiento de los nuevos planes de estudio, que exigen la vinculación de nuestras asignaturas con el perfil profesional del estudiante.

Nos centraremos en problemas de redes eléctricas que se modelan a través de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales (SED).

Este método tiene una gran importancia práctica para el ingeniero y se ilustra por medio de una situación de forma genérica.

Se infiere que el estudiante reconocerá que la aplicación de las matemáticas en un problema de ingeniería consiste básicamente en:

- Encontrar un problema del mundo real.
- Formular un modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes) y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática.
- Aplicar los conocimientos matemáticos que se posee para llegar a conclusiones matemáticas.
- Comparar los datos obtenidos como predicciones con datos reales. Si los datos son diferentes, se reinicia el proceso.

Desde este punto de vista, Bassanezi, citado por Biembengut y Hein (sf), afirma que la enseñanza debe estar enfocada en los intereses y necesidades prácticas de la comunidad. "Aunque su interés no se agote allí, no es intención hacer una apología de "para qué sirve".

En este sentido, el sistema educativo debe proveer elementos para que el individuo desarrolle sus potencialidades, propiciándole capacidad para pensar crítica e independientemente. La matemática no sólo contribuye sobremanera para el ejercicio intelectual, sino que también es el lenguaje de la ciencia.

El desarrollo de estas actividades sin dudas juega un papel fundamental para el futuro egresado, pues el estudiante para su evaluación, tiene que discutir ante un tribunal conformado por sus profesores de Matemática, Circuito y Física la situación problemática que le corresponda y según la calidad del trabajo tiene derecho a presentarlo en jornadas científicas estudiantiles, lo que se le refleja en su evaluación. Por eso compartimos con Adler, citado por Biembengut y Hein (sf), cuando destaca la importancia de esta disciplina, defendiendo que "debemos buscar maneras de desarrollar precozmente, en los alumnos, la capacidad para leer e interpretar el campo de la matemática".

Actualmente, este proceso se utiliza en toda ciencia, de modo que contribuye en forma especial en la evolución del conocimiento humano.

Expondremos algunas ideas teóricas sobre cómo representar un SED.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{11}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_2(t) \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1) \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad . \\
&\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n1}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{aligned}
$$

Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Puede ser escrito como,

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) \quad a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (2)
$$

A continuación aplicaremos una metodología (Castañeda, Fernández, Quintero, Hernández, 2010, p.437) para aplicar el método de coeficientes indeterminados a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Solución del sistema homogéneo. (Xc)

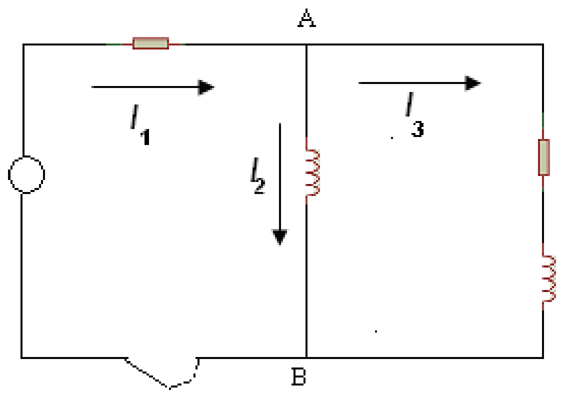
- Conformar la Matriz asociada del sistema homogéneo.
- Plantear la Ecuación matricial.
- Obtener la Ecuación característica.
- Hallar lo valores y vectores propios.
- Plantear la solución general del sistema homogéneo.

Encontrar un vector solución Xp del sistema no homogéneo.

- Proponer una solución particular de la parte no homogénea.
- Ajustar correctamente tal propuesta.
- Utilizar el método de los coeficientes indeterminados.
- Y plantear X = Xc +Xp.

Problema

Determinar las características de las corrientes $I_1(+)$, $I_2(+)$ e $I_3(+)$ en la red eléctrica que se muestra en el siguiente diagrama.



Aplicando las leyes de Kirchoff a cada una de las ramas obtenemos el siguiente modelo matemático:

$$R_1 I_1 + L_2 \frac{dI_2}{dt} = E \qquad\qquad I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$$

$$R_3 I_3 + L_3 \frac{dI_3}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Llevándolo a la forma (1) obtenemos lo siguiente,

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{E}{L_2} - \frac{R_1}{L_2} - \frac{R_1}{L_2} I_3$$

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{R_1}{L_3} I_2 - \frac{R_1 + R_3}{L_3} I_3 + \frac{E}{L_3}$$

Forma matricial según (2).

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} \\ -\frac{R_1}{L_3} & -\left(\frac{R_1}{L_3} + \frac{R_3}{L_3}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{E}{L_2} \\ \frac{E}{L_3} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Ecuación matricial,

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L_2}-\lambda & -\dfrac{R_1}{L_2} \\ -\dfrac{R_1}{L_3} & -\left(\dfrac{R_1}{L_3}+\dfrac{R_3}{L_3}\right)-\lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica.

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L_2}-\lambda & -\dfrac{R_1}{L_2} \\ -\dfrac{R_1}{L_3} & -\left(\dfrac{R_1}{L_3}+\dfrac{R_3}{L_3}\right)-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda\cdot L_3\cdot(\lambda\cdot L_2 + R_1) + \lambda\cdot L_2\cdot(R_3 + R_1) + R_1\cdot R_3 = 0$$

$$L_1L_2\lambda^2 + (R_1L_3 + R_1L_2 + R_3L_3)\lambda + R_1R_2 = 0 \quad (4)$$

Como se observa, la ecuación (4) tiene el tipo de una ecuación cuadrática y como los valores de la resistencia y la inductancia son positivos, ni tiene raíces positivas ni complejas conjugadas, en fin son raíces negativas, entonces el discriminante de (4) tiene la forma,

$$\Delta = l_2l_3(\lambda + a_1)(\lambda + a_2)$$

Donde los vectores correspondientes a los valores propios, $-a_1$ y a_2, son:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ a_1\cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2\cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix}$$

Luego la solución general de la homogénea asociada tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_1 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_1 \cdot t} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_2 \cdot t} \quad (5)$$

y la solución particular se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Con B1 y B2 constante.

Sustituyendo (6) en (3) obtenemos,

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{R_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Sustituyendo en la solución general sería,

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}_g = C_1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_1 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_1 \cdot t} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_2 \cdot t} + \frac{E}{R_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando las condiciones iniciales del problema, nos quedaría la solución de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_1 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_1 \cdot 0} + C_2 \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ a_2 \cdot L_2 - R_1 \end{bmatrix} \cdot e^{-a_2 \cdot 0} + \frac{E}{R_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = -\frac{E\cdot(a_2\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)} \quad \text{Y} \quad C_2 = \frac{E\cdot(a_1\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}$$

$$I_2 = e^{-t\cdot a_2}\cdot\frac{E\cdot(a_1\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\cdot R_1 + e^{-t\cdot a_1}\cdot\left(-\frac{E\cdot(a_2\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\right)\cdot R_1 + \frac{E}{R_1}$$

$$I_3 = e^{-t\cdot a_2}\cdot\frac{E\cdot(a_1\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\cdot(L_2\cdot a_2 - R_1) + e^{-t\cdot a_1}\cdot\left(-\frac{E\cdot(a_2\cdot L_2 - R_1)}{R_1^2\cdot L_2\cdot(a_2 - a_1)}\right)\cdot(L_2\cdot a_1 - R_1)$$

$$I_1 = \frac{E\cdot e^{-t\cdot a_2}\cdot a_2\cdot(L_2\cdot a_1 - R_1)}{R_1^2\cdot(a_2 - a_1)} + \frac{E\cdot e^{-t\cdot a_1}\cdot a_1\cdot(L_2\cdot a_2 - R_1)}{R_1^2\cdot(a_1 - a_2)} + \frac{E}{R_1}$$

Según la metodología aplicada se ha hecho un trabajo matricial para resolver el modelo planteado, nos hemos apoyado en un asistente matemático (DERIVE). Se puede observar la relación entre las diferentes disciplinas y el estudiante reconoce su utilidad en su futuro desempeño como profesional. Esta relación entre las disciplinas es muy importante y es algo en lo que debemos ganar y profundizar para que el estudiante se sienta inmerso y motivado dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática.

Hemos analizado un caso en forma genérica donde se aplicó el método de los coeficientes indeterminados, con valores propios simples y reales.

Conclusiones

En la experiencia expuesta se pudo observar el aspecto modelante o la formulación matemática del problema a través de leyes físicas estudiadas por los estudiantes, así como la articulación de las asignaturas de la disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones y Electrónica y las disciplinas del año.

Se demostró que un modelo matemático es la descripción matemática de un sistema o fenómeno de la vida real y su formulación implica:

- Identificar las variables causantes del cambio de un sistema.
- Establecer un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema (leyes empíricas aplicables).
- Las hipótesis de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más variables que intervienen.

- El enunciado matemático de esas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales.

La adopción de modelos matemáticos, ya sea en forma de presentación o bien en el proceso de creación, adecuadamente dimensionados a la realidad de las comunidades escolares, incorporando nuevas tecnologías, sin dejar de preservar identidades culturales es un medio por el cual el alumno alcanza un mejor desempeño, y logra convertirse en uno de los principales agentes de cambios. En fin, lo que proponemos no es un manual de reglas, sino, un resultado de una vivencia práctica, considerando diversos factores sobre la institución de la enseñanza frente a las necesidades del medio en que vivimos, en creciente y constante desarrollo tecnológico. A pesar de las dificultades encontradas, los resultados positivos nos han llevado, a creer y apostar, cada vez más, en este trabajo que tiene como punto central estimular la creatividad para que el individuo se desarrolle y enfrente con éxito el tercer milenio.

Referencias bibliográficas

Biembengut, M. y Hein, N. (sf). *Modelo, Modelación y Modelaje: Métodos de Enseñanza-Aprendizaje de Matemáticas.* Recuperado el 09 de agosto de 2010 de http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf

Castañeda, P. (2010). Propuesta metodológica para la resolución de problemas de corrientes a través de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden utilizando valores y vectores propios. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, (pp. 437-444). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Judson, T. (1997). *University Mathematics Education in the United States.* Recuperado el 7 de julio de 2003 de http://skk.math.hc.keio.ac.jp/mathsoc/rep97/etrang/judson/node14.html.