

LA ACTIVIDAD DE MEDIR APORTA SIGNIFICADOS A FRACCIONES Y RAZONES

Marta Salazar, Leonora Díaz

Pontificia Universidad Católica. Universidad Metropolitana de

Chile

Ciencias de la Educación

martaceciliias@gmail.com, leonora.diaz@umce.cl

Campo de investigación: Pensamiento numérico

Nivel: Básico

Resumen. *Se presentan evidencias de vacíos e invisibilidades de la enseñanza -para y entre- los conceptos de fracción y razón, mismos que instalan, en el aula, obstáculos producto de las epistemologías diferentes y relacionadas que configuran hoy a estos conceptos. Se ilustra como la medida colabora a dar sentido, fungiendo como eslabón, entre la razón matemática y la razón cotidiana como parte de un estudio que explora, desde una perspectiva socioepistemológica, la enseñanza de la fracción para dotar de significado a su aprendizaje en el marco del pensamiento variacional y del álgebra. Articulado éste con los otros cuatro ejes de pensamiento matemático escolar, a saber, pensamientos de la medida, la forma y el espacio, los números y el azar.*

Palabras clave: socioepistemología, razones, fracciones, medida

Bajos logros de aprendizaje de las fracciones. Los resultados obtenidos en las diferentes pruebas aplicadas a los escolares de nuestro país, tanto nacionales como internacionales (Sistema de Medición de la Calidad de la Enseñanza, SIMCE, de Chile; Programme for International Student Assessment, PISA, de la Organisation for economic co-operation and development, OECD y Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS, de la Asociación Internacional para la Evaluación Educativa) dejan un claro cuestionamiento frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, debido que los malos resultados obtenidos aún persisten a pesar de los cambios que se han producido con el fin de revertir dichos resultados. El segundo estudio regional comparativo y explicativo SERCE - UNESCO, señala que los estudiantes de 6º grado de educación básica de América Latina tienen un desarrollo cognitivo muy bajo. De acuerdo a este estudio, el 56% de los estudiantes presenta dificultad en el nivel III de desempeño cognitivo, nivel que, entre otras habilidades, considera la comparación de fracciones, el uso de la idea de porcentaje en el análisis de la información y en la resolución de problemas. En Chile se aprecia, en este nivel de educación, que los estudiantes no han logrado aprender el concepto de fracción, como lo ilustra la medición nacional SIMCE. La prueba SIMCE de matemáticas, aplicada en el 4º año de educación básica, consideró tres ejes temáticos: números, operaciones aritméticas y formas y espacio. En el eje de números considera los números naturales y el tema de las fracciones. En los análisis de resultados atendiendo a los niveles de logro se observa que, en el nivel inicial, se ubican aquellos estudiantes

que recién están iniciando la comprensión de los números naturales, la realización de los cálculos simples, el estudio de las formas geométricas y el manejo de aspectos básicos de la resolución de problemas, hasta aquellos estudiantes cuya comprensión matemática es fluctuante. Se observa que, en el nivel inicial, se concentra el mayor porcentaje (63%) de los estudiantes pertenecientes al nivel socioeconómico bajo y sólo un 7% del nivel alto. Quienes no alcanzan el nivel cognitivo de las fracciones, tendrán dificultades para interpretar los elementos de una división, la equivalencia de medidas y el desarrollo del pensamiento proporcional, entre otros. Cabe entonces la pregunta ¿Por qué los estudiantes no aprenden las fracciones?

Hacia un estudio socioepistemológico de las fracciones. El saber matemático, aún el más avanzado, resulta de un complejo proceso de selección de piezas de conocimiento y de actividades asociadas. Actividades que desempeñan un papel importante desde el punto de vista de su origen, desarrollo y consolidación de los escenarios históricos, culturales e institucionales. Las aproximaciones epistemológicas tradicionalmente asumen que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando las circunstancias que le dieron origen y los escenarios históricos (Cantoral y Farfán, 2003). La socioepistemología, como una aproximación teórica de naturaleza sistémica, permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, incorporando el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos asociados y los mecanismos de institucionalidad vía la enseñanza. El conocimiento lo asume como el fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales (Cantoral, R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J.; Romo, A.; 2006). La socioepistemología enfatiza la naturaleza social de la actividad de construcción de saberes por parte de actores sociales en contexto, de sus conocimientos y realidades. Este énfasis en lo social, altera el sentido tradicional que se le otorga a las dimensiones cognitivas, didácticas y epistemológicas (Arrieta, 2003). La socioepistemología intenta articular dos grandes componentes. Por un lado lo social y por otro lo epistemológico, donde la persona y su actividad se conviertan en elementos primarios en sus teorizaciones. En esta posición, lo socioepistemológico debe significar, en primer lugar, el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de las matemáticas, es decir, con el lenguaje

de las herramientas (Cordero, 2001, citado por Arrieta, 2003). Mirar la matemática como una construcción humana, un producto social y cultural, conduce a develar que todo objeto matemático, para consolidarse como tal, pasa por varias etapas o momentos. Comienza a ser utilizado sin mayor conciencia de su presencia, siendo manipulado, extendido, formulado, dotado de representaciones y significados más precisos, hasta insertarse en una teoría con características propias (Ferrari, 2001).

Interesa responder, desde una perspectiva socioepistemológica, a la pregunta ¿Por qué los estudiantes no ostentan desempeños competentes en su actividad con las fracciones?

Metodología

Se aborda un diseño de enseñanza de las fracciones con base en una ingeniería didáctica (ID) tendiente a superar las dificultades que experimenta el estudiantado para lograr aprenderla significativamente, atendiendo a que se aprende por la actividad y, en este caso, por la actividad de medir. Una ID considerada a la vez como metodología de investigación y como estrategia para la elaboración de una secuencia didáctica, en sus cuatro fases: (i) Estudios preliminares: históricos-epistemológicos, didácticos, de los entendimientos del estudiantado y socioescolares; (ii) Análisis a priori: diseño y conjeturas respecto a los aprendizajes estudiantiles esperados; (iii) Enseñanza o fase de experimentación; y, (iv) Análisis a posteriori: contraste, entre aprendizajes logrados y conjeturas, y, rediseño didáctico.

Elementos precursores de la ID. Algunos resultados, provenientes de los estudios previos acerca del desarrollo del pensamiento de la medida, de las razones y de las fracciones. En una mirada histórico-epistemológica las magnitudes, de gran importancia en los tiempos de Euclides, hoy prácticamente han desaparecido de la enseñanza. Avanzado el siglo XX se enseñaron en el marco de la geometría de Euclides: la teoría de las magnitudes del libro V de Euclides, uno de los principales pilares de las matemáticas griegas. Junto a esta teoría de las magnitudes, se elaboró en el transcurso de los siglos un sistema de números cada vez más satisfactorio, llegando a nuestro cuerpo de números reales. Esta construcción de números se basó fundamentalmente en la medida de las magnitudes (Rouche, 1994).

La teoría de las razones y proporciones, en los elementos de Euclides, ocupa dos habitats diferenciados: la teoría de las razones de magnitudes (en los libros llamados geométricos) y la teoría de las razones de números (en los libros llamados aritméticos). De esta forma, los números reales, que habían germinado, en el transcurso de los siglos, de la geometría y de la física de las magnitudes, ya no les debían nada de ahora en adelante. No solamente se habían apoderado de su autonomía, sino que al mismo tiempo a través de la estructura de espacio vectorial, sirviendo más tarde para (re)fundar la geometría. El cuerpo de los números, en este nuevo marco, se construyó incluso antes de que se abordara la geometría (Bosch, 1994).

Antecedentes desde la dimensión sociocultural muestran que la medida surge de la necesidad misma de medir y de una noción de igualdad socialmente aceptada (Rouche, 1998).

Por otra parte antecedentes de orden socioescolares informan que profesores y estudiantes enuncian la acepción cotidiana de la razón. Que la razón matemática no emerge en sus discursos, aunque aparece implícita en sus prácticas (Díaz, 2008).

Antecedentes didácticos señalan que las fracciones están siendo enseñadas en el aula, de forma casi exclusiva, bajo la concepción parte-todo. Se utiliza para ello figuras geométricas regulares divididas en partes iguales, para lo cual el estudiante debe realizar un doble conteo, primero el total de las partes y luego las partes achuradas. Con este doble conteo no han realizado nada diferente a la actividad de contar en los números naturales, actividad que realizan desde sus actividades preescolares (Escolano y Gairin, 2005).

Antecedentes cognitivos ilustran que la enseñanza de la medida, en la concepción parte-todo, promueve el aprendizaje pasivo. La relación entre la parte y el todo presenta una situación estática entre cantidades de superficie; no hay situación problemática porque la tarea esta perfectamente preparada para asegurar el éxito de los escolares (op.cit., 2005).

Desde una mirada histórico-epistemológica el concepto de fracción tiene su origen en aquellas actividades humanas relacionadas con la medida (Rouche, 1998).

Por lo tanto, desde la perspectiva didáctica, resultaría significativo construir el concepto de fracción a partir de la medida. Donde el estudiante deba dar una respuesta que no resulte evidente. Que el estudiante encuentre una solución frente al nuevo planteamiento, que elabore la respuesta a través de la toma de decisiones a través de ensayo y error. Ello se ve favorecido entre

otras posibilidades, en problemas de superficies que no están contenidas de manera exacta. Las exigencias cognitivas a partir del concepto de medida tendrán como resultado la elaboración del concepto de fracción como un número real y no vinculado a una simbología que involucra dos números naturales. En consecuencia, los estudiantes darán significado al concepto de razón matemática con base en la medida.

Un estudio socioepistemológico de la razón matemática. Distintas investigaciones ilustran vacíos en los conceptos de razón y fracción con base en obstáculos epistemológicos, entre otros obstáculos posibles. Díaz (1998) muestra que profesores de matemáticas, física y ciencias naturales en la enseñanza de un simple factor unitario dejan ver diferencias producto de la visión que tiene cada uno de ellos desde sus propios campos disciplinarios, visualizándose dos campos disciplinares distintos, con sus conceptos y técnicas propios: “los campos experimentales de la química y la física y el campo ‘formal’ de la matemática usada en el aula” (Díaz, 1998, p. 24). Al respecto Díaz señala que en la enseñanza de las nociones de fracción y de razón existe un vacío que difícilmente podrían resolver los estudiantes.

Díaz (2008) ilustró –en el marco de una investigación realizada con profesores del 5º y 7º año de escolaridad- a través de un cuestionario aplicado con el fin de percibir sus concepciones con relación –entre otros- a los conceptos de magnitud y de medida, que existe una confusión entre dichos conceptos, siendo las magnitudes -para la mayoría de ellos- sinónimo de medida. También exploró los sentidos de la noción de razón en el profesorado. En el contexto de la pregunta del cuestionario ¿Qué entiende por RAZÓN? un 65% de las respuestas se asocian con facetas de la semantización construidas por la disciplina de las matemáticas. Para Díaz (1998, p. 51) en una primera aproximación, la razón matemática es una manera de comparar dos magnitudes, informando esa comparación por división de dos números o de las medidas de dos cantidades de magnitudes. Para Batanero, Cid y Godino (2003, p. 8) es un par ordenado de pares de magnitudes cada una de las cuales se expresa con un número real y una unidad de medida. Con base en estas dos acepciones se analizaron las textualidades docentes. Una de ellas apunta a la razón de cantidades sin mencionar magnitudes:

“(La razón es la) comparación de dos cantidades mediante cociente” [M,EB,C15]

Las restantes textualidades aluden a partes de la noción. Casi la mitad de ellas relevan que es una comparación. Más de la mitad refiere a dos valores que se comparan, refiriendo un quinto de las textualidades a valores que se relacionan y otro quinto a sus nombres, a saber, antecedente y consecuente. Un quinto de las textualidades precisan que la comparación es por cociente. Casi un tercio de las acepciones la entienden como fracción. Y un quinto de las respuestas aluden a sus notaciones: “a/b”, “a:b” y “a es a b”.

Más de un tercio de las respuestas de los docentes asocia a la razón con tres de entre las diez acepciones no vinculadas a las matemáticas que recaba el diccionario de la Real Academia Española, www.rae.es. Algunas de ellas se registran en la tabla siguiente:

ACEPCIONES DOCENTES	ACEPCIONES RAE
¿Qué entiende por razón?	
– <i>Entendimiento [M,EB,C3]</i>	Acto de discurrir el entendimiento
– <i>Explicar o fundamentar una respuesta [M,EB,C6]</i> – <i>Tener razón es la capacidad de razonar una idea con una base [M,EB,C7]</i> – <i>Es el razonamiento lógico para una determinada situación [M,EB,C9]</i> – <i>Es la lógica, lo que no se puede refutar $2 \times 2 = 4$ [M,EB,C10]</i>	Argumento o demostración que se aduce en apoyo de algo
– <i>Verdad, algo que se cumple [M,EB,C3]</i>	Justicia, rectitud en las operaciones, o derecho para ejecutarlas.

Díaz (2008) implementó una mediación que moduló la inducción a la investigación y desarrollo didácticos en una perspectiva sistémica y que considera los aspectos histórico epistemológicos, cognitivos, socioculturales y didácticos. Fruto de la misma, los dos equipos docentes dieron cuerpo a secuencias de enseñanza con soporte en las fases de una ingeniería didáctica. Interesó articular la experiencia y el diseño científico desde los docentes participantes. Se promovieron las operaciones epistemológica, metodológica y tecnológica necesarias para el dominio científico de los hechos sociales, a saber, una construcción teórica y una comprobación empírica en orden a abrir miradas y levantar alternativas acerca de cómo abordar la apropiación cabal de procesos complejos,

en el camino de realizar científicamente un diseño que cristaliza en desarrollos didácticos considerados de modo sistémico.

Afirman los docentes que *“La enseñanza de Razones y Proporciones en la escuela es una de las tareas difíciles para los maestros y maestras... se manifiesta en el alto porcentaje de alumnos que presentan problemas al confundir fracciones con razones matemáticas. Uno de los aspectos que determinan este problema es la pobreza conceptual que se maneja en la práctica escolar”* (Equipo 2; en Díaz, 2008). Y que *“Al consultar a los estudiantes de 5º año básico sobre sus entendimientos de la Razón Matemática... nos dimos cuenta de que profesores y estudiantes reconocen a la acepción cotidiana de la razón y desconocen la razón matemática”* (Equipo 1; en Díaz, 2008). Concluyen que *“existe una deficiencia en el conocimiento general de Razones y Proporciones, no solo por parte de los alumnos, sino también, en alguna medida, por parte de los Profesores, lo cual conlleva a requerir un esfuerzo conjunto para mejorar...”* (Ávila y equipo, 2007, en Díaz, 2008).

El primer equipo diseñó la secuencia didáctica DESDE LA RAZÓN COTIDIANA A LA RAZÓN MATEMÁTICA que atiende a las concepciones de la razón cotidiana y procura que los estudiantes se apropien del concepto matemático de razón. En su estudio de la construcción histórica de la noción de razón matemática, constatan que ésta ha presentado un devenir oscilante separándose por momentos para confundirse en otros, con la noción de fracción y en el marco de la disputa entre números y magnitudes que inicia con la obra de Euclides. Logra un significado pleno mediante un juego sutil entre ostensivos y no ostensivos, en el mundo local de la proporcionalidad. Su proceso de construcción exhibe dificultades: a) En la teoría de las razones y proporciones de los Elementos de Euclides ocupa dos habitats diferenciados: la teoría de las razones de magnitudes, en los libros llamados geométricos (precursora de la construcción del número real que arranca con fuerza el siglo XIX) y la teoría de las razones de números (que confluirá en la construcción de los números racionales) en los libros llamados aritméticos; b) El manual clásico de enseñanza de Dalmau introduce la notación $a:b$, que se lee “es a”, para la razón. Descarta en esta oralización de su escritura, una tenue distancia a la división y a las fracciones; c) En la construcción de lo numérico no surge la necesidad de introducir la noción de razón por lo que el docente no la explicita en su enseñanza. Se introduce en la manipulación de lo numérico que recae bajo la responsabilidad del estudiante. Desde la didáctica las fracciones siempre serán fracciones de números enteros, mientras que las razones permitirán dar sentido a unas “fracciones generalizadas” (Bosch, 1994).

Para el diseño consideran que la razón es una comparación de cantidades de magnitudes – homogéneas o heterogéneas- donde a las magnitudes de la geometría euclidiana se añaden las magnitudes que manejan hoy las distintas ciencias. Atendiendo al amplio uso de la razón cotidiana, a las dificultades que presentan las fracciones, al rol que juega el estudio de lo que varía en la formación del pensamiento matemático estudiantil deciden diseñar una enseñanza de la razón, incorporando el diálogo entre sus acepciones cotidiana y matemática en el 5º año.

Los estudiantes distinguieron acepciones cotidianas respecto de la matemática; compararon parejas de objetos, ordenaron tres objetos o características según un atributo; y, usaron la razón matemática y su notación con el ostensivo “es a”.

El segundo equipo abordó la disyuntiva de fracción o razón matemática sobre la base de una exploración inicial de razones y proporciones, buscó evidencias en los programas, en los entendimientos estudiantiles y en los textos escolares. Constata que no existe una conexión entre razón y fracción en los contenidos de Planes y Programas ni en los textos escolares. Aplicaron dos cuestionarios a dos grupos de estudiantes de séptimo año de escolaridad de dos colegios, uno municipal y el otro particular subvencionado. En el 1º consultaron por las nociones de razón y proporción. En el 2º focalizaron en las nociones de razón y fracción y sus notaciones. Con base en los estudios previos levantaron la secuencia LA RAZÓN MATEMÁTICA CON BASE EN LA MEDICIÓN DE MAGNITUDES. Con los propósitos de identificar magnitudes; reconocer unidades de medida de las magnitudes de longitud y superficie; identificar relaciones matemáticas entre objetos dados; reconocer el significado de razones matemáticas; expresar matemáticamente relaciones entre cantidades de magnitudes mediante una razón; resolver problemas matemáticos que involucran razones matemáticas. Los estudiantes distinguieron fracción –si bien no se abordó la construcción significativa de ésta- de razón sobre la base de la medición de magnitudes, en un trabajo contextualizado con material concreto y desplegaron avances significativos en la medición de magnitudes y la representación de una razón matemática con las notaciones $a:b$, a/b y “a es a b”.

A modo de conclusiones. El aula viene presentando vacíos e invisibilidades -para y entre- los conceptos de fracción y razón. Vacíos que instalarán en ella obstáculos producto de dos epistemologías diferentes, una con relación a las fracciones y la otra con la razón matemática. Se constató entre el profesorado la existencia de obstáculos epistemológicos y didácticos imbricados en la enseñanza de las razones y fracciones. Se ilustró como la medida colaboró a dar sentido,

fungiendo como eslabón, entre la razón matemática y la razón cotidiana. Se explorará en lo que sigue y desde una perspectiva socioepistemológica, la enseñanza de la fracción. Se procurará dotar de significado al aprendizaje de las fracciones en el marco del pensamiento variacional y del álgebra. Articulado éste con los otros cuatro ejes de pensamiento matemático escolar, a saber, pensamientos de la medida, la forma y el espacio, los números y el azar.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003) *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado. CINVESTAV, IPN. México.

Batanero, C., Cid. J. y Godino, J. (2003) *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros*. Tomado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/> el 240306.

Bosch, A. (1994) *La Dimensión Ostensiva en la Actividad Matemática. El Caso de la Proporcionalidad*, Memoria Doctoral, U. Autónoma de Barcelona.

Cantoral, R.; Covián, O.; Farfán, R.; Lezama, J.; Romo, A. (2006) *Investigaciones sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Un Reporte Iberoamericano*. México: Clame

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003) *Matemática Educativa: Una visión de su evolución*. Revista *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40

Díaz, L. (2008) *Enseñando la razón matemática en aulas de 5º y 7º básico*. Obtenido en noviembre de 2008 de www.umce.cl.

Díaz, L. (1998) *Reflexiones didácticas: en torno a Fracciones, Razones y Proporciones*. Ministerio de Educación República de Chile. Santiago de Chile.

Escolano, R. y Gairín, J. (2005) *Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria*. *Revista IEM*, 17-35.

Ferrari, M. (2001) *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.

PISA (2006) Obtenido el 160407 desde <http://nodo6.simce.cl/index.php?id=100&nocache=1>.

Rouche, N. (1994) *Enseñanza de las matemáticas y de las ciencias*. Santiago de Chile: CIDE.

Rouche, N. (1998) *Du Quotidien aux Mathématiques: Nombres, Grandeurs, Proportions*. París: Ed. Ellipses.

SERCE (2008) Tomado en noviembre de 2008 de:

<http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001606/1600660S.pdf>

SIMCE (2007) Tomado el 16 de abril de 2007 de www.SIMCE.cl