

UN ESTUDIO DE CONCEPCIONES DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Mayra Virginia Castillo Montes
Universidad de San Carlos de Guatemala
mayracastillomyahoo.com
Campo de investigación: Gráficas y funciones

Guatemala
Nivel: Superior

Resumen. *En la investigación realizada se indagaron los dominios cognitivos y de representación que manifiestan los estudiantes de ingeniería acerca del concepto de función. Para tal efecto se desarrollaron tres estudios complementarios que incluyen: la revisión bibliográfica acerca de la evolución histórica del concepto de función y los obstáculos de aprendizaje asociados con ella; análisis de la visión del concepto transmitida por el sistema de enseñanza por medio de los programas y libros de texto utilizados y, la exploración de las concepciones de los estudiantes por medio de un cuestionario aplicado a una muestra de 368 alumnos de los primeros dos años de 10 carreras de ingeniería. La investigación permitió caracterizar las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de función y evidenció que las concepciones manifestadas a nivel declarativo no siempre son consistentes con las mostradas al utilizar el concepto en la modelación y solución de situaciones problema.*

Palabras clave: concepciones, concepto, función, representación

Introducción

El concepto de función es uno de los más importantes conceptos matemáticos estudiados en las diversas carreras de ingeniería a lo largo de cuatro cursos de matemática que incluyen contenidos de precálculo, cálculo diferencial e integral en una y varias variables. Además, se estudian diversidad de aplicaciones tanto en áreas básicas como física, estadística y química, así como en otras específicas del campo profesional de cada especialidad.

Paralelamente a su valor formativo y a su gran potencial como herramienta modeladora de fenómenos de distinta naturaleza, se reconoce una alta complejidad en el aprendizaje del concepto de función debido a la multiplicidad de sus registros de representación, a la variedad de contextos en los que puede aplicarse y al enfoque algorítmico que muchas veces predomina en su tratamiento didáctico.

En el contexto de la formación matemática del profesional de ingeniería, dicha complejidad deriva en la observación de obstáculos de aprendizaje del concepto de función para cuya solución didáctica no se encontraron estudios previos acerca del tema, realizados en el contexto de la educación superior guatemalteca, particularmente referida a las carreras de ingeniería.

A partir del 2005, fecha en que se realizó el presente estudio, con base en los resultados obtenidos y con el apoyo de la Dirección General de Investigación de la Universidad de San Carlos de Guatemala, se abrió una línea de trabajo investigativo que pretende vincular la investigación educativa con la docencia al proponer secuencias didácticas que permitan plantear soluciones a la problemática identificada.

Fundamentos teóricos

La investigación se abordó con base en un estudio de Ruiz (1998), que proporciona el sustento metodológico y la adopción conceptual de *concepciones* (del sujeto) en su sentido local, como significaciones y representaciones variadas que los alumnos asocian con un objeto matemático que es único, en este caso el de función, como producto de su interacción en sistemas didácticos o con su entorno. En vista del carácter interno de las concepciones que un sujeto elabora, el estudio se restringe al análisis interpretativo de un sistema de prácticas (textuales, gráficas, orales) evidenciado en la solución de las situaciones exploratorias propuestas. Del mismo estudio se adopta la caracterización propuesta de las concepciones de los sujetos, en las cuales intervienen:

- Los invariantes que se reconocen como elementos esenciales del objeto matemático.
- El conjunto de representaciones simbólicas que se asocian y utilizan para resolver situaciones problema vinculadas con el concepto.
- El conjunto de situaciones que el sujeto asocia con el concepto matemático, es decir, en las cuales considera apropiado su uso como herramienta.

Las posiciones teóricas acerca de las representaciones semióticas se toman de los aportes de Duval (1998) y de los estudios realizados por Hitt (1996) y Dolores (2002), en los cuales se evidencia que los sistemas de representación pueden ser de carácter numérico, gráfico, algebraico, analítico, pictórico y verbal. Con base en los resultados de los trabajos de Gatica (2002), se analizó el tratamiento didáctico dado al tema en los programas de los cursos en estudio y en los respectivos libros de texto utilizados.

Referente a la forma de representación predominante, investigaciones realizadas por Tall (1988) con estudiantes anglosajones, evidencian una marcada tendencia a conceptualizar una función como una expresión algebraica, la cual aparece asociada con la dificultad para identificar funciones cuando no se cuenta con una fórmula algebraica. Este hecho se torna particularmente importante al conjugarlo con los aportes de Kleiner (1989) y Ponte (1990) en los cuales se establece que dicha concepción corresponde a las definiciones dadas por Bernoulli y Euler en el siglo XVII, en las cuales se asociaba fuertemente el concepto de función con una expresión analítica.

Otros aportes teóricos importantes surgen del trabajo de De La Rosa (2003) en el cual indaga las concepciones de profesores mejicanos del nivel medio acerca del concepto de función y reporta que además de la tendencia a conceptualizar las funciones como expresiones analíticas, se tiene muy arraigada la idea que las funciones deben representarse por una sola expresión algebraica. Esto permite explicar las dificultades detectadas en el presente estudio para identificar funciones definidas por partes en forma algebraica, así como para su utilización en la modelación de situaciones problema.

La revisión bibliográfica realizada permitió adoptar como bases teóricas importantes los siguientes resultados:

- El manejo adecuado del concepto de función implica *“el dominio de las distintas representaciones del concepto, la evocación de las mismas sin ninguna contradicción y de manera casi espontánea”* (De La Rosa, 2003, p. 122).
- En cuanto a la resolución de problemas *“(…)La percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelar o matematizar relaciones entre magnitudes físicas (u otras) es una condición sine qua non para dar sentido al concepto de función en su totalidad”* (Sierpínska, citada por Ruiz, 1998, p. 64)

La conjugación de estos resultados permite establecer cuándo y en qué medida el concepto de función ha sido adquirido y resalta la necesidad de presentar al estudiante de ingeniería situaciones problema diversas que propicien la construcción global del concepto.

Objetivos

1. Caracterizar el dominio cognitivo de las concepciones que manifiestan los estudiantes de ingeniería, acerca del concepto de función.
2. Identificar las concepciones que permanecen y las que evolucionan a través del tránsito de los estudiantes por cuatro cursos de matemática.

Metodología

1. Población y muestra: la población objeto de estudio estuvo constituida por cuatro sub poblaciones consideradas independientes, cuyos tamaños se describen a continuación junto a los respectivos tamaños muestrales.

Población	Tamaño poblacional	Tamaño muestral
Estudiantes Matemática Básica 1	1264	95
Estudiantes Matemática Básica 2	1143	94
Estudiantes Matemática Intermedia 1	876	86
Estudiantes Matemática Intermedia 2	1175	93
Total	4458	368

Fuente: Centro de Cálculo, Facultad de Ingeniería. USAC.

2. Elaboración de instrumento de recolección de datos: con base en la revisión bibliográfica acerca de las tareas que comprenden el dominio cognitivo del concepto de función y otros instrumentos utilizados para su exploración, se elaboró cuestionario y se discutió con los profesores que imparten los cursos en estudio. Dicho instrumento constaba de tres partes: en la primera se buscaba que los alumnos explicitaran sus concepciones en forma verbal, dieran ejemplos y propusieran ejercicios para el aprendizaje del concepto. La segunda parte proponía representaciones analíticas y gráficas solicitando que se identificaran los casos en que fuesen

funciones y se justificara la respuesta dada. En la tercera, se propusieron situaciones problema que incluían variación geométrica, con respecto al tiempo y en la vida cotidiana.

3. Validación del instrumento: mediante un muestreo aleatorio simple se seleccionó una muestra piloto de 93 alumnos distribuidos en los cuatro cursos como se indica a continuación:

Curso	Tamaño muestral piloto
Matemática Básica 1	23
Matemática Básica 2	19
Matemática Intermedia 1	34
Matemática Intermedia 2	17
Total	93

Para determinar la confiabilidad del instrumento elaborado se utilizó el modelo del coeficiente alfa de Cronbach, y con ayuda del paquete estadístico SPSS se obtuvo como resultado que $\alpha = 0.7072$, a partir de lo cual se consideró que la prueba era confiable y que podía utilizarse para evaluar la muestra definitiva.

4. Análisis de información: se analizaron los programas de los cursos y los libros de texto utilizados por los alumnos y se realizó un análisis de contenido de las repuestas dadas a cada situación propuesta. A partir de las tablas de frecuencias de las variables en estudio, se realizaron cruces entre las clasificaciones correspondientes a cada curso, con el objetivo de identificar la evolución de las variables durante el proceso de aprendizaje. Luego, se realizó un análisis factorial y de correspondencia de las respuestas dadas por los estudiantes en las situaciones de reconocimiento de funciones a partir de su representación gráfica y de su representación algebraica. Lo anterior se completó con la aplicación de análisis de cluster, en busca de identificar agrupaciones de los datos obtenidos.

Resultados obtenidos

Del análisis de programas y libros de texto de los cursos

1. En el primer curso de matemática el concepto de función se presenta como transformación entre los números reales o subconjuntos de ellos, con privilegio de las representaciones algebraica y gráfica. La aplicación del concepto se realiza en contextos de variación respecto al tiempo y en situaciones geométricas.
2. En el segundo curso el concepto de función se vincula con los temas de continuidad, límites, derivadas e integrales definidas, con énfasis en los dominios gráfico, algebraico y de aplicación, principalmente en situaciones problema que incluyen variación con respecto al tiempo.
3. En el tercer curso, el concepto de función se estudia relacionado con diversas técnicas de integración, tanto en integrales definidas como indefinidas. Se enfatiza el dominio algebraico del concepto.
4. En el último curso se estudian funciones de varias variables y técnicas de integración para integrales dobles y triples, en diferentes sistemas de coordenadas (rectangulares, cilíndricas y polares).
5. En los libros de texto utilizados hay escasez de ejemplos y ejercicios que requieran el tránsito entre los diferentes dominios cognitivos del concepto de función, ya que usualmente se privilegia la utilización de alguno de ellos, que en general es de tipo algebraico o gráfico.
6. En los ejemplos y ejercicios propuestos se detectó que existe énfasis en el tratamiento algebraico del concepto de función, el cual en general deriva en la realización de procedimientos algorítmicos.
7. El concepto de función en sí mismo se estudia únicamente en el primer curso, en los tres restantes se supone completado su aprendizaje y se enfatiza la ejecución de procedimientos algorítmicos para el cálculo de límites, derivadas e integrales.

Del análisis de respuestas dadas por los estudiantes

1. Las concepciones acerca del concepto de función que fueron identificadas se pueden clasificar de la siguiente manera: algoritmo de cálculo, expresión algebraica, representación gráfica, asociación (correspondencia entre conjuntos numéricos) y transformación.
2. La concepción respecto al concepto de función que se manifiesta con mayor énfasis en los alumnos del primer curso de matemática es de tipo numérico, observándose que ésta desaparece paulatinamente en el tránsito de los estudiantes por los cursos superiores. Paralelamente a dicho descenso, se observa un incremento de la manifestación del dominio algebraico del concepto, la cual es predominante en la última etapa.
3. Los alumnos de ingeniería presentan dificultades para transitar entre los diferentes dominios cognitivos del concepto de función, mostrándose en particular escasamente desarrollada la habilidad para modelar problemas utilizando funciones, aún en los estudiantes del último curso analizado.
4. El análisis factorial permitió categorizar las representaciones algebraicas y gráficas propuestas para su identificación, en cinco clases: a) representaciones gráficas de funciones definidas por partes, b) funciones constantes, c) representaciones algebraicas de funciones racionales, d) representaciones que no son funciones y d) representaciones identificadas por su forma.
5. El análisis de cluster evidenció una fuerte semejanza entre las agrupaciones construidas individualmente para cada curso y la agrupación observada en la muestra total. Este hecho evidencia que el comportamiento de los estudiantes ante las situaciones propuestas es independiente del curso en el cual se ubican.

Conclusiones finales

1. El tratamiento didáctico dado al concepto de función en los textos analizados, aporta elementos que condicionan las concepciones de los estudiantes de ingeniería acerca de dicho concepto, lo cual se manifiesta en los ejemplos y ejercicios que proponen, argumentos con que justifican sus procedimientos y situaciones en las que emplean el concepto.

2. Es posible afirmar que las concepciones de los estudiantes de ingeniería acerca del concepto de función, no evolucionan significativamente en el tránsito de los alumnos por los diversos cursos de matemática, como sería de esperarse. Las concepciones más arraigadas son: como fórmula algebraica y como representación gráfica.
3. Las expresiones verbales del concepto de función son elaboraciones que los estudiantes realizan de forma personal, en las que predomina la idea que una función es una asociación entre conjuntos numéricos.
4. En los alumnos de ingeniería existe diversidad de concepciones respecto a la noción de función, manteniendo cada una de ellas un carácter local, fragmentado y compartimentado. Por lo cual se considera incompleto su aprendizaje.

Avances en el proyecto

A partir de la socialización de los resultados obtenidos con los profesores de matemática de la Facultad de Ingeniería y de otras unidades académicas, se continuó trabajando en esta línea investigativa con la indagación de las concepciones de los profesores- que en su mayoría son ingenieros- acerca del concepto de función. Además, se trabaja en el ensayo de secuencias didácticas que pretenden vincular las diferentes representaciones del concepto de función y fortalecer su aplicación en la modelación de fenómenos propios de la práctica de las diferentes especialidades de las carreras de ingeniería.

Referencias bibliográficas

De La Rosa, A. (2003). Errores e inconsistencias en la enseñanza del concepto de función en el docente. *Mosaicos Matemáticos 1*, 121-133.

Dolores, C. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (I)* (pp. 75-81). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Duval, R. (1998). Registros de presentación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa, II*, 173-207

Gatica, N. (2002). El concepto de función en textos universitarios. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (I)* (pp. 131-136). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 245-264.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept. *The College Mathematics Journal, Volumen 20 (4)*.

Ponte, J. (1990). The history of the concept of function and some educational implications. *Educacao e Matematica No. 15*

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Jaén, España: Universidad de Jaén.

Tall, D. (1988). *Concept image and concept definition*. USA.:University of Warwick.