FORMACIÓN DEL CONCEPTO LÍMITE MEDIANTE DOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN: REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y EL USO ALGEBRAICO

Noé Camacho Calderón, Catalina Navarro Sandoval, Miguel Díaz Cárdenas, Edgardo Locia Espinoza
Universidad Autónoma de Guerrero México
noeilyn_21@hotmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx
Campo de investigación: Pensamiento Matemático Avanzado Nivel: Medio

Resumen. *Uno de los problemas centrales que se presentan, para abordar el tema de límite, es sin duda cuando nos enfrentamos al concepto de infinito. Generalmente el docente al enseñar el concepto de infinito utiliza metáforas didácticas basadas en conjuntos muy grandes, esto para fijar la idea de infinitud. De acuerdo con la real academia española, esto permite crear la noción de infinito en un lenguaje cotidiano, lo que lleva a generar una mala formación de este concepto, dentro de un lenguaje matemático, ya que la imprecisión del lenguaje cotidiano hace ver al concepto de infinito muy vago y se aleja de la idea matemática como unidad total (Ortiz, 1994). El interés de nuestro trabajo se centra precisamente en el diseño de actividades, donde el estudiante pueda realizar y observar un proceso infinito, a través de ejemplos geométricos donde se presente la situación límite (proceso infinito culminado), permitiendo la formación del concepto de límite.*
Palabras clave: tendencia, proceso infinito, formación, situación límite

Antecedentes

Respecto al tema de límite se han realizado diversas investigaciones, de las cuales hemos detectado al menos cuatro campos, el epistemológico, el cognitivo, de corte histórico y el didáctico, en este último se han realizado investigaciones donde el estudio de interés, se centra sobre algunas nociones que estudiantes y profesores tienen respecto al concepto de límite, sin embargo pocas son las investigaciones que se interesan en estudiar el proceso enseñanza-aprendizaje sobre dicho concepto dentro del aula, dado que el interés de nuestro trabajo se enfocará a contribuir en el campo didáctico, se realizó un análisis de algunas investigaciones sobre dicho concepto, dentro de las cuales se encuentran De la Torre (2002) y Páez (2005) donde se menciona que son notorias las deficiencias de la enseñanza de las matemáticas, en los distintos niveles de escolaridad, desde el básico elemental hasta el superior. Particularmente problemáticos son los conceptos asociados con la noción de infinito y de acuerdo con la investigación de Juter (2005) se menciona que los estudiantes experimentan a menudo dificultades cognoscitivas cuando se encuentran en el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, esto debido a que se centran en la solución de problemas y no en la teoría. En este mismo sentido la investigación de Dubinsky (1996) señala que no existe ninguna investigación que se preocupe por ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que tienen con el proceso aprendizaje del concepto de límite. Por ejemplo, en la investigación que realiza Sánchez y Contreras (1997), dentro de los resultados obtenidos, se puede apreciar que los profesores necesitan de un material didáctico para poder comprender e interiorizar el concepto de límite. Sin embargo, la investigación de Fernández (2000) encuentra que el uso de un asistente matemático (software), puede a portar a la enseñanza de la matemática una mejor comprensión del alcance de sus métodos y su empleo y en consecuencia una mayor motivación para el estudiante. Por otro lado, la investigación de Miranda (1999), Blázquez y Ortega (2001), reportan que es necesario utilizar sistemáticamente varios sistemas de representación e incidir en sus relaciones desde el principio de la enseñanza, para evitar que los alumnos obtengan visiones sesgadas de los conceptos.

A partir de este análisis surge nuestra hipótesis de trabajo, consideramos que los estudiantes necesitan ejemplos del tipo geométrico, para poder visualizar el proceso infinito en límites del tipo $lím_{x\to\infty} f(x)$, apoyados por un asistente matemático y así como el uso de registros de representaciones gráficas y algebraica, antes de abordar el tema de límite en el contexto de las funciones y a partir de aquí puedan llegar a formar el concepto de límite.

Problemática y fundamentos

La problemática que detectamos está presente en las dificultades que presentan los estudiantes (no toman en cuenta el proceso infinito, lo ven como una sustitución) en el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, en particular límites en el infinito, al momento de trabajar con esta noción, de acuerdo a los planes y programas de estudio y libros de texto, éste se aborda de manera algebraica y gráfica (se cae en uso abusivo de lo algorítmico), no se trabaja con representaciones geométricas donde el estudiante pueda visualizar el proceso infinito, es decir, el concepto de límite no se trabaja en otro contexto, sólo se trabaja en el contexto de las funciones, limitando a los estudiantes a una formación aceptable del concepto.

Por lo que, el objetivo central de este trabajo es diseñar actividades donde el estudiante interactué con representaciones geométricas, involucrando representaciones gráficas y algebraicas, para llevar a cabo la formación del concepto de límite. Para el diseño de las actividades se tomó en cuenta a las teorías de Rubinstein (citado en Davýdov, 1982) y Duval

(1999), para describir si el estudiante puede llegar a transformar la información que se manipula en un registro a otro registro de representación, es decir si se presenta un cambio de conocimiento Duval (1999). En este mismo sentido lo que señala Rubinstein se tomará en cuenta para definir los rasgos esenciales que se llevan a cabo en la formación de un concepto, consideramos que para la formación del concepto de límite, los rasgos esenciales son los siguientes:

1. Tendencia (proceso infinito), infinito potencial.
2. Asegurar la tendencia $|x - a| < \varepsilon$
3. Proceso infinito culminado (abstracción), infinito actual.
4. La situación límite.

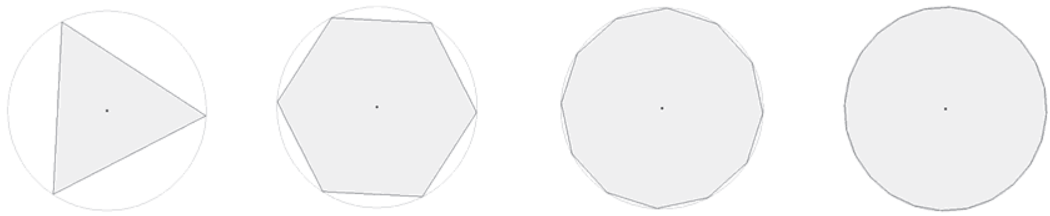
El primer rasgo esencial significa que debe haber una tendencia hacia algo, es donde entra en juego el infinito potencial. Por ejemplo:

- Si inscribimos un polígono regular con un número *n* cualquiera de lados en una circunferencia tenemos;

Podemos observar que el perímetro del polígono tiende al perímetro del círculo.

- El segundo rasgo va de la mano con el primero, es decir, se debe asegurar (por ejemplo, en el caso del polígono regular con un número *n* cualquiera de lados inscrito en un círculo, y haciendo variar a *n* infinitamente), que la diferencia del

  Perímetro de las dos figuras va disminuyendo, hasta que llega a ser menor que cualquier número positivo tan pequeño como se elija en esta caso $|P_c - P_p| < \varepsilon$.



- En el tercer rasgo esencial es donde entra en juego el infinito actual, prescindiendo de la dificultad para llegar a ese algo y abstrayendo así que el proceso culmina en ese algo, es decir $P_c = P_p$.

- El cuarto rasgo esencial es donde se lleva a cabo la situación límite, es decir, la situación de un proceso infinito culminado.

Una vez identificado los rasgos esenciales se lleva a cabo el diseño de las actividades las cuales son las siguientes:

El objetivo de estas actividades es propiciar la interacción del alumno en distintos registros de representación, con la intención de obtener los rasgos esenciales del concepto de límite que le permitan formar dicho concepto.

Diseño

Actividad 1

El objetivo de esta primera actividad, es introducir al estudiante, a identificar la tendencia de un proceso infinito, presentándose, la etapa de análisis.

Dada una hoja de papel, corte la mitad y guarde la otra parte, ahora de la mitad de hoja que quedo, corte otra vez a la mitad y así sucesivamente siga el mismo procedimiento.

1. Explique qué sucede en la operación número 10.

2. Cuando el número de operaciones se vuelve infinito
   a) ¿Qué sucede con el área de la parte de la hoja que se va cortando?
   b) ¿Se podría obtener la cantidad del área que se va cortando?

Actividad 2

El objetivo de esta actividad, es que el estudiante logre identificar la representación geométrica de la actividad 1, ayudándole a encontrar los rasgos esenciales y producir el cambio del conocimiento expresado en la actividad anterior, se sigue presentando la etapa de análisis permitiendo la etapa de la síntesis.

A) 1. Dado un cuadrado de área 1, ilumine la mitad, ahora de la mitad del cuadrado que quedo sin iluminar, ilumine la mitad y así sucesivamente siga el mismo procedimiento.

2. Explique qué sucede en la operación número 10.

3. Cuando el número de operaciones se vuelve infinito
   a) ¿Qué sucede con el área de la parte del cuadrado que se va iluminando?
   b) ¿Se podría obtener la cantidad del área que se va iluminando?
   c) si se sumarán todas esas partes de áreas, ¿A qué sería igual el área total?

B) 1. Imagínese que tiene un círculo, ilumine un tercio, ahora ilumine un tercio de uno de los tercios sobrantes y así sucesivamente siga el mismo procedimiento.

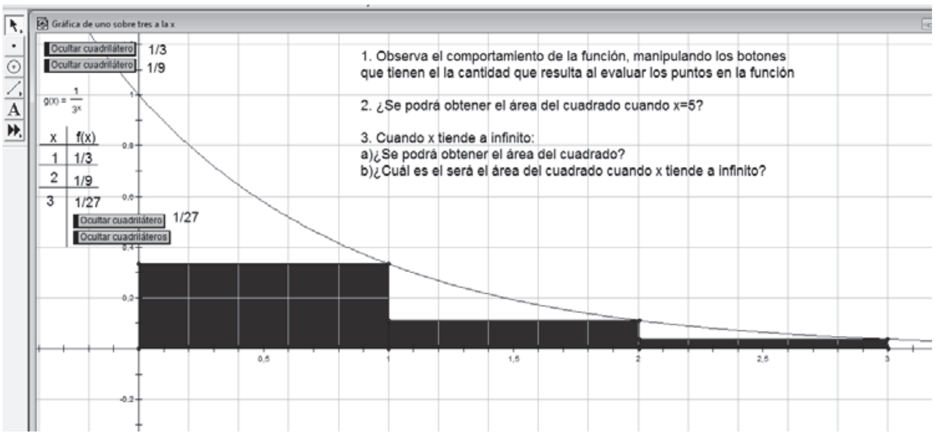
2. Explique qué sucede en la operación número 10.

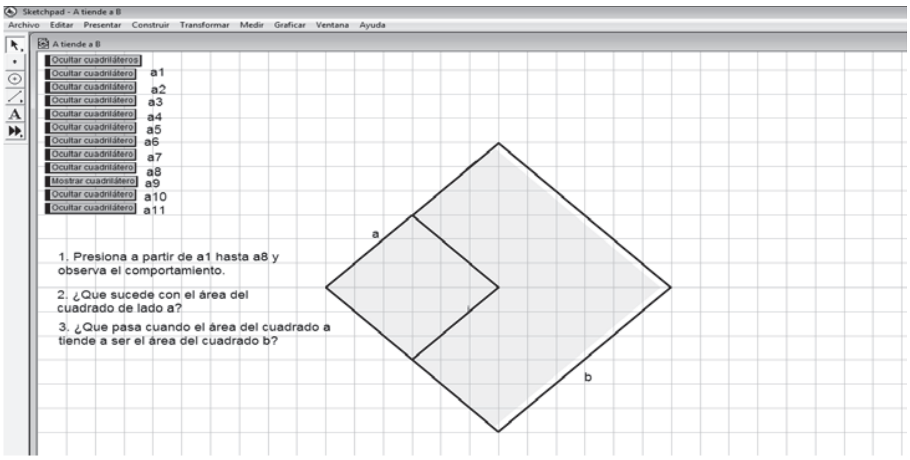
3. Cuando el número de operaciones se vuelve infinito
   a) ¿Qué sucede con el área de la parte del círculo que se va iluminando?
   b) ¿Se podría obtener la cantidad del área que se va iluminando?

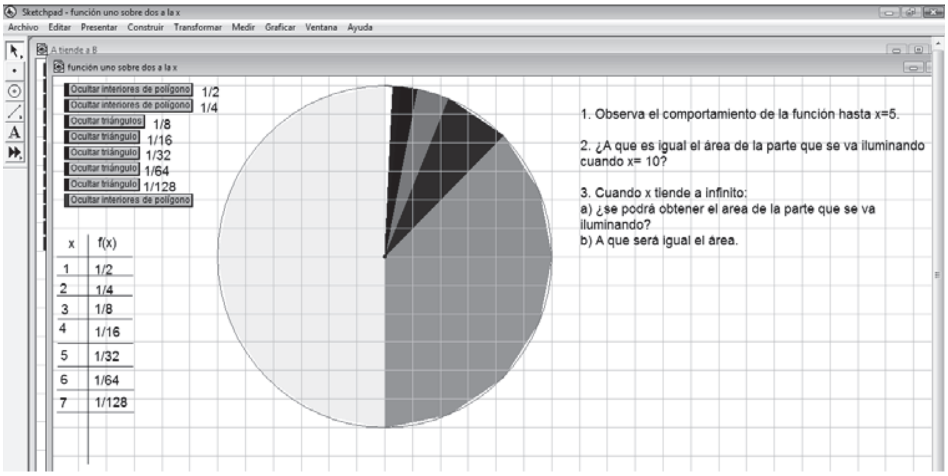
c) si se sumarán todas esas partes de áreas, ¿A qué sería igual el área total?

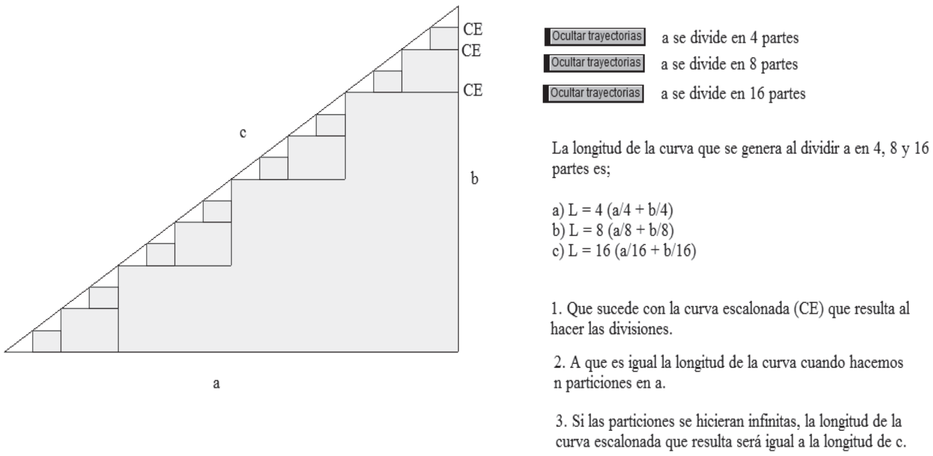
Actividad 3

El objetivo de la actividad 3, es permitir al estudiante la abstracción de los rasgos esenciales que le permitan llegar a la situación límite, es decir, la etapa de la formalización.









A manera de resultados

Cabe mencionar que como la investigación se encuentra en proceso, nos encontramos hasta el momento en la etapa de validación de estas actividades, se aplicó una prueba piloto a un grupo de estudiantes de la Preparatoria No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero, a partir de la cual observamos en los resultados obtenidos, que los estudiantes si lograron identificar los rasgos esenciales para identificar la situación límite a la que se quería llegar, en la etapa de formalización pudieron identificar que no toda tendencia nos llevará a un límite, lo cual nos deja claro que ideas intuitivas de límite pueden a veces llevar a contradicciones con conceptos matemáticos válidos.

Consideramos importante que al momento de enseñar el concepto de límite, es necesario que se presenten actividades de este tipo (en este contexto) al estudiante para ayudarlo a entender el concepto de límite en el contexto de las funciones.

Referencias bibliográficas

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de Representación en la Enseñanza del Límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(3), 219-236.

Dubinsky, E. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior 15*, 167-192.

De la Torre (2002). Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Obtenido en marzo 17, 2008, de http://matematicas.udea.edu.co/~edumath/LINKS/presentacion.htm.

Paéz, R. (2005). *Reconstrucción del Concepto de Límite*. Obtenido en marzo 28, 2008, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2728884.

Davýdov, V. (1982). *Tipos de Generalización en la Enseñanza*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. *Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Fernández, M. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 3*(2), 171-187.

Juter, K. (2005). Limits of functions- how do students handle them? *Online Jurnal Abstract Information – Sabinet Online, 11-20.*

Miranda, R. (1999). *Estado que guarda la Noción de Límite en Estudiantes de Secundaria. Trabajo del 50% de maestría.* Unidad Académica de Chilpancingo.

Ortiz, R. (1994). El Concepto de Infinito. *Boletín 1*(2). Cuaderno titulado Las Paradojas en Matemáticas. México.

Sánchez, C. y Contreras, A. (1997). La Relación Didáctica Profesor-Estudiante en la Enseñanza del Concepto de Límite de una Función. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa,* 59-63. México.