# ARGUMENTAR-CONJETURAR: INTRODUCCIÓN A LA DEMOSTRACIÓN

Efrén Marmolejo Vega, Gema Rubí Moreno Alejandri
Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas (México)
efrenmarmolejo@yahoo.com, alejandrigemath@gmail.com

**Resumen**. Presentamos como potenciar a la Argumentación para la producción de conjeturas, asumiendo que es precisamente la formulación de conjeturas la actividad central de la construcción de conocimiento matemático en la educación secundaria y la Argumentación una competencia fundamental a desarrollar. Exploramos cómo fortalecer conjeturas a partir de la fortaleza de los argumentos que las soportan, y al lograrlo, generamos las condiciones de partida para su Demostración. Así, caracterizamos a la Argumentación en sus facetas de preformal y formal, al tiempo que proponemos una metodología para fortalecer los argumentos en la fase preformal, mediante mecanismos de afirmación y refutación.

**Palabras clave**: argumentar, conjeturar, demostración

**Abstract**. We present in the following article, a proposal to potentiate argumentation for conjecture's production, assuming precisely that conjectures formulation is the main activity in the construction of mathematical knowledge at high school and the argumentation an essential activity to develop. We explore ways to fortify conjectures as from fortitude of arguments that endure them, and when it is achieved, we generate the beginning conditions for its demonstration. Thereby, we characterize the argumentation in its preformal and formal facets, while we propose a methodology to strengthen the arguments in preformal phase, through affirmation and refutation mechanisms.

**Key words**: argue, conjecture, demonstration

Durante las dos últimas décadas, ha tomado interés investigar con propósitos didácticos, la relación Argumentar–Demostrar, concebida la primera como el acto de convencer en base a la pertinencia de los razonamientos plausibles, en tanto que Demostrar es el proceso de deducir un enunciado o proposición a partir de otras que le preceden, al lado de reglas bien determinadas, aceptadas por la comunidad matemática. En tales investigaciones, surge la necesidad de definir conceptos tales como Explicar, Probar, Demostrar y Razonamiento; teniendo en común todos ellos de manera explícita o implícita a la Argumentación con acepciones específicas en sus definiciones.

Entre las investigaciones realizadas, destacan por su interés didáctico las desarrolladas por Raimond Duval (1999) y Balachev (1982 y 1988), quienes postulan que la Argumentación conduce a la generación de obstáculos epistemológicos para Demostrar. Por otro lado, Efraim Fishbeim (1987) y Paolo Boero (1999), consideran que argumentar y demostrar, forman una unidad cognitiva.

Paolo Boero explica la dualidad argumentar-demostrar como el resultado de la unidad cognitiva de un teorema, el que transcurre en dos etapas, la de la producción de la conjetura que implica producirla mediante la exploración, discutir las conjeturas elaboradas y la sistematización de los enunciados construidos, la otra etapa, es la construcción de la prueba la cual se logra mediante las exploraciones y encadenamiento reglado de argumentos. Considera que los resultados de los alumnos variarán enormemente de los producidos por los matemáticos, que el maestro juega el papel de mediador en la formulación de los enunciados, incluyendo todos los instrumentos efectivos para expresar y probar teoremas y que el proceso de producción de conjeturas es determinante para introducir a los alumnos a la argumentación.

Por nuestra parte, en Marmolejo y Solano (2005), desarrollamos la tesis de que en efecto, Argumentar–Conjeturar–Demostrar, constituyen una unidad cognitiva, y que la Argumentación tiene un papel relevante en esta relación. Distinguimos que en el razonamiento demostrativo lo importante es diferenciar una prueba de una intuición, en tanto que para el razonamiento plausible, lo importante es distinguir (a partir de sus argumentos) entre intuiciones, unas más y otras menos razonables. Los objetivos de una Argumentación son la deliberación, la justificación y la transmisión de una convicción, y sus reglas preformales se basan en la experimentación, los procedimientos heurísticos y las intuiciones, pero también en los saberes científicos estables en el campo semántico del alumno, en tanto que las reglas de la argumentación formal, son los de la lógica.

Esclarecer la relación existente entre demostrar, probar y argumentar como procesos que producen razonamientos matemáticos, parte del hecho histórico del uso de la intuición, la heurística y la inducción como formas de búsqueda y descubrimiento de enunciados matemáticos, potenciales de ser probados lógicamente. Junto al desarrollo y perfeccionamiento de la demostración matemática, surgieron los conceptos de explicación, argumentación, conjeturar, probar y razonamiento lógico deductivo, cuyas definiciones establecen las diferencias entre ellos. No es en la matemática, sino en su enseñanza donde de manera frecuente se confunden y sustituyen unos con otros, dando pie a un aprendizaje incorrecto y limitado; se aduce que ello ocurre a causa del uso del lenguaje natural como forma básica de comunicación de resultados matemáticos en la escuela.

Requerimos, en efecto establecer las diferencias y relaciones de los conceptos involucrados. Así: *Explicar*, consiste de un discurso inteligible que caracteriza la verdad sobre una proposición o un resultado que se dirige a un interlocutor, los argumentos empleados, transcurren entre discutir, refutar y aceptar; la *Prueba*, es una explicación aceptable para una comunidad en un momento y tiempo determinados, esta decisión ocurre entre el objeto de un debate y la significación, determinando un sistema de validación compartida entre los interlocutores; *Demostrar*, es el proceso sistemático de deducir una proposición de otras que le son precedentes, a partir de reglas lógicas que sólo admiten como criterio de verdad la no contradicción lógica; y finalmente, la *formulación de un Razonamiento* en matemáticas, se asume como una actividad intelectual de manipulación de información a partir de enunciados previos que producen nueva información.

La intencionalidad de la demostración ha variado del mismo modo en que la sociedad ha evolucionado, así, para los griegos la idea primaria subyacente a la demostración es *convencer en medio del debate*, en tanto que para Newton en su época, se buscaba que las demostraciones *aclararan más que convencieran* y no es sino hasta el siglo XIX en que demostrar es en *rigor* en la matemática necesario, pues ello permitió hacer frente a nuevas concepciones de los objetos matemáticos.

Si bien entre argumentar y demostrar se establecen diferencias, la relación entre estas es consustancial a su existencia, la una precede a la otra, pero el fin de ambas es la búsqueda de la "verdad". Una demostración es correcta o incorrecta según el criterio de la no contradicción lógica en el proceso deductivo, en tanto que la argumentación se valida por la plausibilidad aceptada entre los dialogantes (alumno-alumno-maestro) y es tanto o más verdadera según el grado de pertinencia.

Asumida la relación argumentar-demostrar como la unidad cognitiva cuyo eslabón es la conjetura, no ha lugar la tesis del obstáculo epistemológico de la demostración y si a lo postulado por Polya en relación a que el objetivo de la argumentación es la deliberación, justificación y transmisión de una convicción y que al proceso de construcción y maduración de las argumentaciones conlleva a la formulación de conjeturas.

En un primer momento en situación escolar, los argumentos serán muchos y plurales, corresponde al profesor en su papel de promotor que el grupo discrimine los argumentos esenciales hasta lograr "coherencia" entre los argumentos, en un segundo momento habrá que dar fuerza y orden a los argumentos hasta producir el enunciado conducente, la conjetura formada.

Planteamos la hipótesis de que la conjetura es el objetivo de la argumentación preformal, e inicio del proceso demostrativo, es pues el punto de inflexión que explica la unidad cognitiva *Argumentar–Conjeturar–Demostrar*. La confianza en una conjetura disminuye cuando un fundamento posible para ella es refutado y aumenta cuando una conjetura incompatible es refutada.

### En cuanto a la Argumentación, diferenciamos:

### *Argumentación Inductiva*

Fundada en hechos, verificaciones y predicciones utilizando como recursos los procedimientos heurísticos durante el proceso de estructuración de conjeturas por la vía inductiva

### *Argumentación Deductiva*

Resulta del encadenamiento lógico de proposiciones conforme a las reglas de la lógica proposicional

Una argumentación deductiva, es correcta o incorrecta, en tanto que la argumentación inductiva se valida por la plausibilidad aceptada entre los dialogantes y es tanto o más verdadera según el grado de pertinencia.

El valor lógico de una argumentación deductiva es intrínseco a ella y se substrae de la persona que la realiza, es independiente al sujeto, por el contrario, la argumentación inductiva depende del sujeto que la realiza.

Los objetivos de una argumentación inductiva, son la construcción de conjeturas, mediando en ello, la deliberación del acuerdo, la transmisión de una convicción y la justificación.

Bajo la hipótesis de la Unidad Cognitiva Argumentar – Conjeturar – Demostrar, identificamos dos momentos del proceso, la construcción de la conjetura y la demostración de la misma. Procesos que transcurren el primero de manera inductiva a partir de generar argumentos que van desde explicar hechos específicos que mediante la experimentación logran ser generalizados a nivel de convicción pertinente, para luego perfeccionar los argumentos hasta la estructuración y fortalecimiento de la conjetura, y que ésta alcance la condición de enunciado de una proposición susceptible de ser probada vía la demostración, lo que define el segundo momento del proceso.


Fig. 1 Esquema de los procesos que intervienen en la argumentación inductiva y en la argumentación deductiva

La formación de la conjetura, parte de la pluralidad de argumentos, unos más que otros bien direccionados y fundados en ideas intuitivas o heurísticas, dándoles coherencia y orden e incorporando saberes científicos ya estables en los estudiantes, fortaleciendo los argumentos hasta el punto de perfeccionar el enunciado de la conjetura, incorporando el lenguaje y simbología más próximos a la proposición matemática de la que sea equivalente.


Fig. 2 Fortalecimiento de Conjeturas

Una vez estructurada la conjetura, habrá de darse paso a su fortalecimiento, el cual no es un proceso desordenado y carente de sistematicidad, todo lo contrario, se prevé un programa heurístico, basado en las ideas de Polya referidas a que en lo plausible como lo es la formación de conjeturas bajo la argumentación inductiva, está presente un patrón inductivo isomorfo al demostrativo, desde luego con intencionalidades y reglas diferentes, pero ambos en busca de la verdad una plausible y otra lógica.


Fig. 3 Isomorfismo de reglas de inferencia

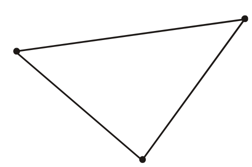
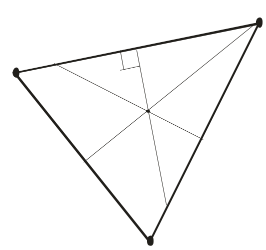
En el fortalecimiento de las conjeturas se transita por las fases de confianza-confirmación-certidumbre de las mismas. Así, es necesario precisar algunos aspectos de esta transición:

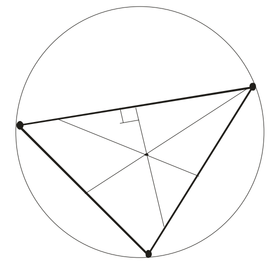
- Una conjetura adquiere más credibilidad con la verificación de una nueva consecuencia.
- Una conjetura alcanza más credibilidad si una conjetura análoga adquiere mayor credibilidad.
- Se utiliza un procedimiento típicamente inductivo para examinar las consecuencias de una conjetura y juzgarlas sobre la base de tal examen.
- Las consecuencias son más o menos creíbles según el mayor o menor acuerdo con los hechos de sus consecuencias observables.

Tabla. 1 Ejemplo de construcción de conjeturas realizado con un grupo regular de bachillerato

**Objetivo:**
A partir de un problema particular, generar una generalización global que concluya en la construcción de una conjetura equivalente a una propiedad geométrica.

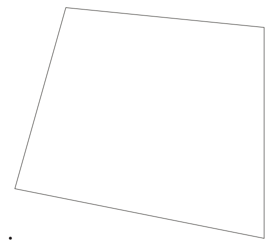
**Diálogo**

| Maestro | Alumnos | |
|---|---|---|
| **M:** ¿Por tres puntos del plano no coloniales, puede hacerse pasar una circunferencia? | **A:** Sí, porque si unimos los puntos obtenemos un triángulo, a éste le puedo circunscribir una circunferencia. |  |
| **M:** ¿Cómo lo haces? ¿Cuál es el centro de esta? | **A:** La intersección de las mediatrices |  |



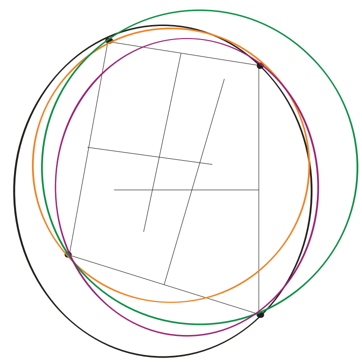
**M:** Muy bien, ahora consideren la siguiente situación ¿Por cuatro puntos (cualesquiera) coplanares, no colineales tres a tres, puede hacerse pasar una circunferencia?

**A**: Si es posible, que cada punto quede en una misma circunferencia



**M**: ¿Cualesquiera cuatro puntos? Intenta la construcción.

**A:** No, no siempre es posible.

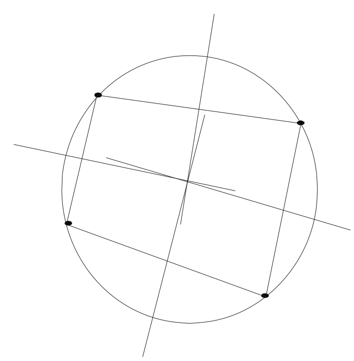


**M:** ¿Por qué no?

**A**: Porque resultan distintas intersecciones de las mediatrices, y con ello por cada tres un centro, y entonces resultan cuatro circunferencias que pasan por tres puntos respectivamente.

**A**: Pero….en algunos casos debe ser posible, tal parece que….bueno, para que los cuatro puntos estén en una circunferencia, será necesario que……hagámoslo al revés.

**A**: Sea un cuadrilátero inscrito, entonces el centro será la intersección de las mediatrices.



**A**: ¡Sí!, así es…

**M:** ¿Cuál es, entonces, tu conclusión?

**A**: Para que por cuatro puntos del plano no coloniales pase una circunferencia, es necesario que al unir consecutivamente los puntos con segmentos de recta, las mediatrices de éstos sean concurrentes.

Esta última afirmación, constituye una propiedad geométrica que en la literatura del área es equivalente a la proposición: "Para que un cuadrilátero sea inscriptible a una circunferencia, es necesario y suficiente que la suma de sus ángulos opuestos formen un ángulo llano, es decir que los ángulos opuestos respectivos sean suplementarios".

## Conclusiones

- Es necesario mirar la matemática como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación (argumentación) de conjeturas, y estar dispuestos a buscar patrones y regularidades
- Existe la necesidad de reconceptualizar a la demostración, en situación escolar.
- La argumentación con bases empíricas y científicas debe ser encausada a la construcción de conjeturas.
- Potenciar el paso de la conjetura a la prueba (fortalecer la misma hasta disponerla como una proposición que evidencia la necesidad de la prueba).
- En el proceso Formación-Fortalecimiento-Prueba, la veritatividad de las conjeturas ha de darse del consenso a la prueba.

## Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1982). Preuve et demostration en mathematiques ou collage. *Recherches en didactiqué des mathematiques*, 3, 261-304.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les éleves de collége. Thése d´etat*. Université Joseph Fuourier, France.

Boero, P. (1999). *Argumentación y Demostración. Una relación compleja, productiva* e *inevitable en las Matemáticas y la Educación Matemática*. En *Preuve*. [En línea] Disponible en: http://www.lettredelapreuve.lt/Newsletter/990708Theme/ ES.html.

Duval, R. (1999) *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México Iberoamerica..

Fishbein, E. (1987) *Intuition in science and mathematics* . Holanda: CIP..

Marmolejo, E., y Solano, M., (2005) Convención Didáctica sobre la Demostración Geométrica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Vol. 18, págs. 139-146