

LA ONTOSEMIÓTICA Y LA ECOLOGÍA DE SIGNIFICADOS QUE DESARROLLAN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AL RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ruth Rivera¹, Álvaro Encinas¹, Maximiliano De Las Fuentes¹, Ramiro Ávila²

¹Universidad Autónoma de Baja California

México

²Universidad de Sonora

riveracastellon@gmail.com

Campo de investigación: Resolución de Problemas

Nivel: Superior

Resumen. *Se desarrolla una investigación que tiene como objetivo central caracterizar los objetos matemáticos previos necesarios para que el estudiante de ingeniería pueda abordar una gama de problemas que se resuelven utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden. En este trabajo se presenta un análisis ecológico utilizando algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino, 2003), a fin de indagar cuáles son los significados institucionales de los objetos matemáticos, cuáles son las relaciones implícitas y explícitas de los elementos y los significados que se ponen en juego cuando los estudiantes de ingeniería se enfrentan a la resolución de éstos problemas. El análisis tiene como propósito caracterizar la complejidad ontosemiótica de problemas de libros de texto y los conflictos potenciales que puedan producirse en los estudiantes del curso de Ecuaciones Diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, México.*

Palabras clave: ontosemiótica, análisis semiométrico, análisis ecológico

Introducción

Actualmente las diferentes universidades del mundo, se encuentran ante el reto de formar ingenieros con una formación más sólida en el área básica, para que aborden problemas de diseño y aplicación tecnológica. En la mayoría de las licenciaturas de ingeniería, el 25% de la carga curricular está compuesto por cursos del área de matemáticas. El curso de ecuaciones diferenciales se considera una asignatura clave para todas las ramas de la ingeniería siendo el enlace que relaciona los cursos de cálculo con problemas propios de la disciplina. Las ecuaciones diferenciales permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; como crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos eléctricos, etc. El presente trabajo está inserto en una investigación de mayor alcance donde el objetivo central es establecer las relaciones entre los diversos significados de los objetos matemáticos (ecología de significados), que se ponen en juego cuando un estudiante de ingeniería intenta resolver problemas con ecuaciones diferenciales de primer orden. La investigación se realiza mediante el enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2003).

Este reporte corresponde a una primera etapa, donde se realizó un análisis de problemas típicos de crecimiento y temperatura, correspondientes a ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello se utilizaron algunas herramientas teórico-metodológicas de dicho enfoque, para caracterizar la complejidad ontosemiótica e identificar los conflictos potenciales que puedan producirse en los estudiantes.

Marco Teórico

El estudio se realizó desde el enfoque Ontosemiótico de la Cognición para la Instrucción Matemática (EOS), el cual se basa en una concepción pragmática u operacional del significado, un acercamiento antropológico que considera la matemática como una actividad humana, que se desarrolla en el seno de ciertas instituciones por lo que todo conocimiento es relativo a una institución. (Godino y Batanero, 1994, Godino, 2002, 2003)

El EOS considera dos herramientas de análisis: *Semiométrico* y *Ecológico*. En un estudio semiométrico (Contreras y Ordoñez, 2006) se requiere caracterizar aquellos problemas que se presentan a los estudiantes para generar el significado propio de las ecuaciones diferenciales; como son el tipo de representaciones, los conceptos y argumentos utilizados; el lenguaje, etc. *El ecológico*: está centrado en lo que rodea al objeto. Para analizar, interpretar y resolver el campo de problemas de las ecuaciones diferenciales, debemos tomar en cuenta que no son un objeto aislado, requieren de conocimientos previos, de los conceptos que se ponen en juego para comprenderlas.

El Análisis Ecológico consiste en revisar las relaciones implícitas y explícitas dentro de los elementos que aparecen cuando un estudiante trata de resolver problemas. Cuáles son los significados que él pone en juego, o bien, utiliza para dar explicación a los nuevos conceptos que aparecen en dicho ejercicio; por ejemplo el caso de una expresión matemática, un signo, etc. Se considera conflicto semiótico a la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción, puede explicar las dificultades y limitaciones en los aprendizajes y las enseñanzas implementadas. (Godino, 2003).

A continuación se presenta un grafico que muestra un esquema de las acciones principales del análisis ontológico semiótico:

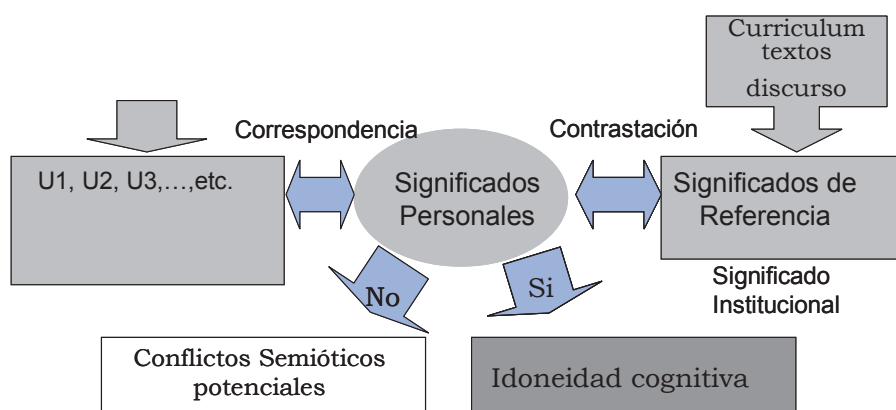


Fig. 1 Análisis Ontológico-semiótico

Los elementos primarios del EOS son: El lenguaje, las situaciones-problémicas, propiedades, procedimientos, conceptos y argumentos. Los elementos anteriores, de acuerdo al rol de lenguaje con que participan pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: Personal-institucional, Elemental-sistémico. (Godino y Batanero, 1994).

Método

Se seleccionaron problemas típicos, de crecimiento y de temperatura, del texto de Ecuaciones Diferenciales de Zill (2003, pp. 96-97). Lo anterior debido a que es uno de los más utilizados por los profesores que imparten este curso en la Facultad de Ingeniería. Para el análisis de los problemas, cada uno de ellos, se ha dividido en unidades de análisis, que están relacionados con los elementos primarios del EOS: *El lenguaje*, se revisó el lenguaje utilizado en el texto, si se introducen notaciones y de que tipo, gráfico, numérico, etc. *Las situaciones*, como son presentados o como son abordados los ejemplo de problemas en el texto. *Las acciones o procedimientos*, que hace el texto para resolver ejemplos tipo. *Los argumentos y los conceptos* involucrados. *Las proposiciones* o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones. (Godino y Batanero, 1994). Cada una de las unidades se analiza caracterizando los significados elementales y sistémicos puestos en juego en cada bloque (análisis semiótico).

La tabla 1, muestra en la primera columna las unidades de análisis; la segunda describe el tipo de elemento de significado y en la última columna aparecen las observaciones correspondientes. El criterio para definir cada unidad de análisis, fue el cambio de elemento de significado, el cambio de notación, el uso o identificación de una propiedad, o la descripción, sistematización y validación.

Análisis

A continuación se presenta la tabla 1, como resultado del análisis realizado a uno de los problemas de Crecimiento.

	Descripción	Tipo	Observaciones
U ₀	Crecimiento y Decaimiento	Elemental-Sistémico	Título de la introducción
U ₁	El problema de valor inicial: $\frac{dx}{dt} = kx \quad (1)$ $x(t_0) = x_0$	Situación-problémica sistémica, que se puede subdividir en: U ₁₋₁ lenguaje natural + U ₁₋₂ lenguaje simbólico	El autor hace mención a un concepto revisado en una unidad anterior (conocimiento previo). Utiliza una situación sistémica. No explicando los términos involucrados.
U ₂	en donde k es una constante de proporcionalidad	Concepto expresado en lenguaje natural	El autor asume que el estudiante comprende lo que significa <i>constante de proporcionalidad</i> , lo cual no siempre es cierto.
U ₃	Se emplea como modelo de distintos fenómenos en los que intervienen crecimiento o decaimiento o desintegración	Situación sistémica expresada en lenguaje natural	Aquí el autor le asigna un sentido a la expresión anterior (un uso)
U ₄	Haciendo mención a la primera sección del texto "en biología se ha observado que en cortos periodos, la rapidez de crecimiento de algunas poblaciones (como bacterias o animales pequeños) es	Se define la situación en lenguaje natural utilizando dos conceptos Se puede subdividir en: U ₄₋₁ rapidez de crecimiento	El autor menciona dos conceptos asumiendo que el estudiantes los sabe interpretar y relacionar: Rapidez y proporcionalidad

	proporcional a la población presente en el tiempo t.	U ₄₋₂ proporcional a la población presente	
	Descripción	Tipo	Observaciones
U ₅	Si conocemos una población en cierto tiempo inicial arbitrario t ₀ la solución de (1) nos sirve para predecir la población en el futuro –esto es, para t>t ₀ .	Situación general expresada en lenguaje natural	El autor pretende reforzar las afirmaciones anteriores en forma general de cuando usar la ecuación (1) y para que nos sirve.
U ₆	Un cultivo tiene una cantidad inicial P ₀ de bacterias. Cuando t=1h, la cantidad medida de bacterias es 3/2 P ₀ . Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) en el momento t, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.	U ₆₋₁ Situación problema Especifico expresada en lenguaje natural U ₆₋₂ rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presentes P(t) (concepto)	El autor supone que el lector deberá interpretar este problema presentado en lenguaje natural e identificar y relacionar los datos con la expresión utilizada para su resolución
U ₇	Solución: primero resolveremos la ecuación diferencial (1) reemplazando el símbolo x por P	Procedimiento expresado en lenguaje natural	Falta información: por qué se están cambiando las variables? No menciona la relación entre el caso general con lo particular.
U ₈	Si t ₀ =0, la condición inicial es P(0)=P ₀ A continuación usaremos la observación empírica que P(1)=3/2P ₀ para determinar la constante de proporcionalidad k	Proposiciones expresadas en lenguaje natural	Escrita de esta manera la información no es fácil para el lector reconocer los datos del problema.
U ₉	Observe que la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$, es separable y lineal al mismo tiempo.	Proposición expresada en lenguaje natural y simbólico	Se motiva al lector a relacionar el modelo matemático con dos de los métodos vistos previamente.
U ₁₀	Cuando se escribe en la forma estándar de una ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dP}{dt} - kP = 0$, Se aprecia por inspección, que el	U ₁₀₋₁ Procedimiento expresado en lenguaje natural U ₁₀₋₂ proposición expresada en lenguaje simbólico. U ₁₀₋₃ proposición	El registro verbal es deliberadamente incompleto, ya que supone que el algoritmo es conocido por el lector. El registro simbólico también.

	factor integrante es e^{-kt}	expresada en lenguaje natural y simbólico	
U ₁₁	Al multiplicar ambos lados de la ecuación por este término, e integrar, se obtiene $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0 \quad y \quad e^{-kt}P = c$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Se asume que el lector reconoce el método anterior y se omiten los pasos completos del procedimiento de resolución de la ecuación.
U ₁₂	Por consiguiente, $P(t) = Ce^{kt}$ ahora sustituiremos las condiciones iniciales del problema, cuando $t=0$, $P(0)=P_0$, por lo que $P_0 = Ce^0 \Rightarrow P(t) = P_0e^{kt}$.	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	En esta parte se presentan las sustituciones de las condiciones iniciales, para obtener la solución particular del problema
	Descripción	Tipo	Observaciones
U ₁₂	Cuando $t=1$, $P(1)=3/2P_0$, luego entonces $\frac{3}{2}P_0 = P_0e^{k(1)} \Rightarrow \frac{3}{2} = e^{k(1)}$ por lo que $k = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.4055$, con lo cual nos queda la siguiente ecuación $P(t) = P_0e^{0.4055t}$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Los procedimientos son claros pero de nuevo se valen de algunas simplificaciones que para el estudiante no son obvias, se da por hecho que se cuenta con el dominio de algunas reglas de los logaritmos y/o exponenciales.
U ₁₃	Para establecer el momento en que se triplica la cantidad de bacterias despejamos t de $3P_0 = P_0e^{0.4055t} \Rightarrow 0.4055t = \ln 3$, y así tenemos: $t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ horas}$	Procedimiento expresado en lenguaje natural y simbólico.	Aquí de nueva cuenta se presentan los procedimientos, con las omisiones mencionadas en la unidad anterior.

Tabla 1. Análisis de un problema tipo

Conclusiones

A partir del análisis mostrado en la tabla 1, del problema de crecimiento de bacterias podemos concluir lo siguiente:

- a) Conocimientos Previos de la materia: en los libros de texto de cálculo se dice que la expresión $\frac{dy}{dx}$, es un símbolo inseparable y que significa entre algunas cosas una razón de cambio, más sin embargo en el contexto de las ecuaciones diferenciales el autor separa este cociente sin los argumentos suficientes.
- b) Conocimientos del Contexto (Biología, Física, Química, etc.): un error u omisión muy frecuente en los libros de texto de ecuaciones diferenciales, es que el autor supone que el lector conoce una gran variedad de contextos de aplicación para la presentación de sus problemas. Siendo este punto donde se da comúnmente un conflicto entre los significados del lector y los del autor.
- c) Manejo adecuado del lenguaje: el lenguaje natural que utiliza el autor no está escrito en una forma lo suficientemente clara y precisa.
- d) La descripción de los procedimientos: los procedimientos desarrollados no son argumentados y presentan omisiones. Los pasos descritos para la resolución del problema, presentan laguna o brincos, de procedimientos que para el estudiante no son obvios. Además falta argumentar el por qué de los pasos descritos en tal procedimiento.

De lo anterior se percibe que del análisis semiótico o de significados que se ha aplicado y desarrollado en este trabajo es un recurso de utilidad para la investigación en didáctica de las matemáticas. Este tipo de análisis fino de corte semiótico, permite identificar significados puestos en juego en una actividad, tales como el uso de términos y expresiones; nos arroja luz sobre los conflictos de significado y permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones que se presentan en los libros de texto. Estos conflictos semióticos pueden dar explicación, al menos parcialmente, de las dificultades potenciales de los estudiantes. La información obtenida permite también identificar las limitaciones de los recursos materiales utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Referencias bibliográficas

Contreras, A. y Ordoñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 9(1), 65-84.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un Enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D., (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada. Obtenido enero 2, 2007 en <http://www.ugr.es/local/jgodino>

Zill, D. (2003). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones al modelado*. México: Thomson.