¿PUEDE FAVORECER LA VISUALIZACIÓN A LA CARACTERIZACIÓN DE LA DEPENDENCIA LINEAL PARA UN CONJUNTO DE POLINOMIOS?

Carlos Oropeza Legorreta, Javier Lezama Andalón
FESC-UNAM. CICATA-IPN México
carlos_oropezamx@yahoo.es, jlezamaipn@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Superior

Resumen. *En esta fase de la investigación ponemos de manifiesto un punto de vista que permite reflexionar estrategias asociadas a la noción de la visualización en matemáticas. En este reporte presentamos un recorrido general del trabajo realizado hasta este momento, el cual se centra primero en el reconocimiento de la dificultad de la naturaleza del álgebra lineal, y además reflexionamos sobre el poder de la visión como un factor fisiológico y cultural, a partir de ello se proporcionan algunos resultados de investigaciones que abordan la actividad de la visualización en los procesos de construcción de conocimiento en la escuela. Finalmente se comentan algunas exploraciones que hemos podido realizar en diferentes escenarios de estudio.*
Palabras clave: visualización, combinación lineal, dependencia e independencia lineal

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en las escuelas de ingeniería representan un conjunto de dificultades con características diferentes a las que se presentan, por ejemplo en el cálculo. En cálculo es frecuente motivar la enseñanza de los conceptos a partir de otros conocimientos físicos o geométricos presentados previamente, pero en el álgebra lineal la mayor parte de conceptos son presentados por los libros de texto escolares a partir de definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene (en la mayoría de los casos) conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada. En el ámbito escolar, el carácter abstracto de esta materia ha obligado a los profesores de álgebra lineal a desarrollar prácticas alternativas de presentación del tema.

Con el fin de identificar las dificultades que enfrentan los alumnos al estudiar los conceptos matemáticos de combinación lineal, así como los de dependencia e independencia lineal en polinomios de segundo grado. En esta investigación se pretende hacer uso de las representaciones visuales para que los alumnos puedan incorporarlas en la construcción de significados de los conceptos antes referidos. Tradicionalmente los problemas asociados se resuelven haciendo uso la definición dada (combinación lineal igual al cero vector) junto con argumentos derivados de la lógica. Esto hace que muchos estudiantes sientan que la materia es demasiado abstracta (se ha observado que en curso convencional los estudiantes son capaces de determinar si un conjunto de vectores forman o no un espacio vectorial, es decir pueden aplicar los axiomas con la dificultad inherente correspondiente, pero cuando se les cuestiona respecto a su significado, ellos no pueden articular una respuesta, entendemos este hecho como una manipulación algebraica carente de significado) y que los contenidos son objetos que no tienen relación con algo que se pueda aplicar en una situación concreta.

Entre los problemas reportados (Sierpinska, 1996) relativos al aprendizaje del álgebra lineal, están las diferentes representaciones que puede tener un mismo objeto y para las cuales no resulta claro para un estudiante que se trata del mismo objeto. Por ejemplo se puede presentar al conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo como un subespacio vectorial y en otro momento ese mismo conjunto se puede presentar como el núcleo de una transformación lineal, en otro caso es frecuente recurrir a la geometría en R^2 o R^3 para visualizar la suma de vectores, pero resulta difícil usar la geometría para visualizar las sumas en espacios vectoriales como polinomios o matrices. El alumno se encuentra, entonces, con dos representaciones diferentes de la suma de vectores, una geométrica con una definición formal y otra enteramente formal para espacios vectoriales generales.

En busca de un marco teórico

La visión (el acto fisiológico de ver) es fundamental para nuestro ser biológico y socio-cultural. Así, el aspecto biológico está descrito bien en lo siguiente (Adams y Victor, 1993, p. 207): “La facultad de la visión es nuestra más importante fuente de información acerca del mundo. La mayor parte del cerebro está implicada en la visión y en el control visual del movimiento, la percepción y la elaboración de palabras, y la forma y color de los objetos. El nervio óptico contiene más de un millón de fibras, comparadas a las 50,000 en el nervio auditivo. El estudio del sistema visual ha tenido grandes avances sobre el conocimiento de nuestro sistema nervioso. Es más, sabemos más acerca de la visión que de cualquier otro sistema sensorial”. En cuanto al aspecto socio-cultural, es casi trivial establecer que vivimos en un mundo donde la información es transmitida sobre todo en envolturas visuales, y las tecnologías mantienen y fomentan la comunicación que es esencialmente visual. Aunque “la gente ha estado usando imágenes para el registro y la comunicación de información desde la era de las pinturas rupestres el potencial para que la 'cultura visual' desplace a la 'cultura impresa' es una idea con implicaciones tan profundas como el cambio de la cultura oral a la cultura impresa." (Kirrane, 1992, p. 58 citado por Arcavi, 1999). Consideramos entonces que la herramienta fisiológica de la visión y la influencia cultural pueden ser utilizadas como una estrategia en la tematización de la actividad de los problemas matemáticos y podría poner por tanto a la visualización al servicio y análisis de ciertos conceptos; el caso que nos ocupa es el estudio de los polinomios de segundo orden. La visualización de un problema matemático juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema. Desde este punto de vista, en un primer acercamiento, no solamente es importante entender las dificultades para manipular cada una de esas representaciones, también lo es el análisis de las tareas de conversión entre representaciones que debemos proponer a nuestros estudiantes. También es importante no priorizar alguna de ellas en detrimento de otras cuando estamos promoviendo un proceso de construcción de un concepto matemático.

A continuación presentamos diversas afirmaciones de investigadores que han dedicado esfuerzos por definir a la visualización:

En una entrevista realizada a Arcavi por Mario Sánchez éste señala que la visualización para él es: "*una manera de conectarse con ideas mediante el sentido de la visión con el objetivo de estudiar, entender y aplicar distintas maneras de acercar la matemática a los alumnos"* (Arcavi, 2007). La visualización puede acompañar un desarrollo simbólico, debido a que una imagen visual, en virtud de su concreción, puede ser "*un factor esencial para crear el sentimiento de auto-evidencia e inmediatez*" (Fischbein, 1987, p.101 citado por Arcavi, 1999).

El desarrollo de las teorías que fortalecen la importancia de la visualización matemática, considerada como "*la habilidad para interpretar y representar de manera diferente la información percibida y la reflexión extraída de información visual*", impone a los autores de textos considerar estas ideas para presentar nuevas propuestas de enseñanza.(Hitt, 2002). Por otra parte, la visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende"* (Cantoral & Montiel, 2002, p.24). En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura. Dentro de lo que defiende Hillel (2000), se encuentra el planteamiento de renunciar a la enseñanza de la teoría formal de espacios vectoriales. Lo cual se traduce, que para un estudiante le resulta poco significativo abordar el desarrollo de la axiomatización utilizada en una clase convencional. En algunos casos encontramos respuestas como: "*puedo determinar si un conjunto de vectores puede ser considerado como un espacio vectorial, pero no puedo decir nada en cuanto a su significado*", sin que lo que plantea Hillel sea considerado como la solución a la complejidad de estudiar álgebra lineal.

Resultados de algunas investigaciones

Hoy día, la posición central de la visualización en el aprendizaje y hacer de las matemáticas parece ser ampliamente reconocido. La visualización ya no está relacionada sólo a propósitos ilustrativos, sino también siendo reconocida como un componente clave del razonamiento (profundamente comprometida con lo conceptual y no lo meramente perceptivo), resolución de problemas, e incluso en pruebas. Sin embargo, hay todavía muchas cuestiones concernientes a la visualización en la enseñanza de las matemáticas que requieren cuidadosa atención. Tomando prestado de Eisenberg y Dreyfus (1991), propongo clasificar las dificultades en torno a la visualización en tres categorías principales: 'cultural', cognitiva y sociológica. Una dificultad 'cultural' se refiere a las creencias y valores que se tienen acerca de los que significan las matemáticas y hacer matemáticas, lo que es legítimo o aceptable, y lo que no lo es. Las dificultades cognitivas incluyen, entre otras cosas, la discusión cuya versión simplista sería la siguiente: ¿lo 'visual' es más fácil o más difícil? Cuando la visualización actúa sobre imágenes ricas conceptualmente (o en palabras de Fischbein, cuando hay estructuras intermedias conceptuales), la demanda cognitiva es ciertamente alta. Bajo las dificultades sociológicas, yo incluiría lo que Eisenberg y Dreyfus (1991) consideran como cuestiones de enseñanza. Su análisis sugiere que enseñar implica una "transposición didáctica" (Chevallard, 1985) que, brevemente, significa la transformación que el conocimiento inexorablemente sufre cuando es adaptado de su carácter científico/académico al conocimiento como es enseñado. Arcavi, Hadas y Dreyfus (1994) describen un proyecto para estudiantes de secundaria no orientados matemáticamente que estimula la toma de sentido, graficación, estimación, razonabilidad de las respuestas. diSessa, Hammer, Sherin y Kolpakowski (1991) describen un experimento de aula en que estudiantes jóvenes eran alentados a crear una representación de una situación de movimiento, y después de varios períodos de clases terminaron por 'inventar' la graficación cartesiana. Siendo no sólo 'consumidores' de representaciones visuales, sino también sus creadores colectivos, comunicadores y críticos, estos estudiantes desarrollaron experiencia meta-representativa, estableciendo y usando criterios concernientes a la calidad y adecuación de las representaciones. Así la visualización fue para ellos no sólo una manera de trabajar con productos pre-establecidos, sino también fue en sí misma el objeto de análisis. Nemirovsky y Noble (1997) describen un estudio de investigación, en que una estudiante hace uso de un dispositivo físico que sirve como una herramienta de traducción usada para apoyar el desarrollo de su habilidad de 'ver' gráficas pendiente vs. distancia. En suma, nuevos énfasis y enfoques curriculares, prácticas innovadoras en las aulas y el entendimiento que desarrollamos de ellos, revalora la visualización y su naturaleza colocándola como una cuestión central en la enseñanza de las matemáticas. Esto no debe ser tomado en el sentido de que la visualización, no importa lo iluminativo de los resultados de la investigación, será una panacea para los problemas de enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, entendiéndola mejor debe ciertamente enriquecer nuestro entendimiento de los aspectos de la toma de sentido de las personas sobre las matemáticas y así servir al progreso de nuestro campo. Señalado por Arcavi (1999). Como hemos podido constatar las investigaciones reportadas que centran su atención en la visualización no aluden al tema de nuestro trabajo por lo que el estudio de los polinomios de segundo grado podría ser considerado como una exploración no centrada en la comprensión del espacio vectorial de los polinomios, sino como una experiencia de esclarecimiento en la comprensión de un concepto del álgebra lineal en un espacio vectorial inusual para observar las dificultades del uso de la visualización como herramienta de construcción del concepto. Como una extensión de lo que hasta el momento se ha realizado con este enfoque. Justificando de esta manera la pertinencia de nuestro estudio. A continuación mostramos un parte de una serie de exploraciones que hemos realizado en la puesta en escena de lagunas situaciones didácticas diseñadas para el análisis del concepto de dependencia e independencia lineal.

Un par de exploraciones

El reporte que se presenta parte de experiencias escolares, que hasta el momento se ha podido identificar algunos rasgos que muestran las dificultades en la interpretación del concepto de dependencia e independencia lineal.

En la primera parte de la figura 1, se puede observar que la dependencia e independencia lineal en el espacio de los polinomios de segundo grado es determinada por el punto de intersección entre las parábolas correspondientes. En la segunda parte, se puede identificar la intención de generalizar su idea inicial, se aprecia que hacen uso de la definición de combinación lineal como un elemento que determina la producción de parábolas que se intersecan en un punto común, podemos considerar que su propuesta centrada en el análisis algebraico de casos particulares no les proporciona elementos suficientes para estructurar un planteamiento general.

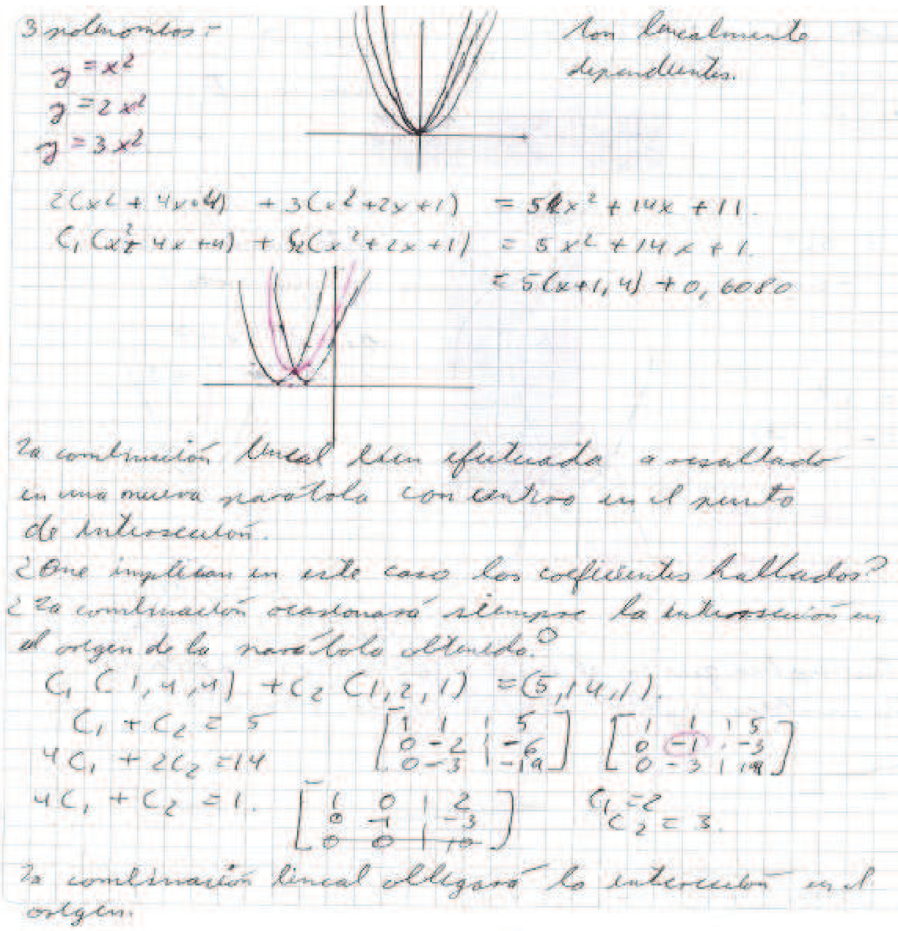

Figura 1

Nótese en la figura 2, que la exploración realizada por este grupo de estudiantes se relaciona con la idea de multiplicidad entre dos polinomios de segundo orden y la intentan relacionar con los puntos que contienen en común las gráficas de estas parábolas.

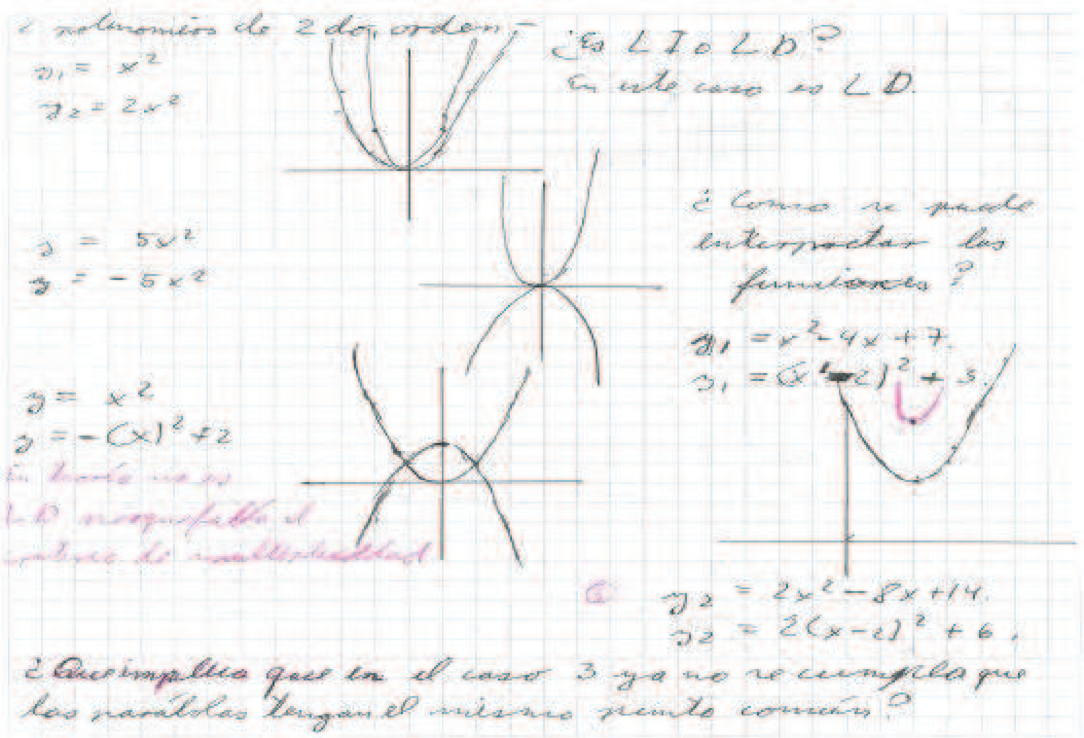

Figura 2

¿Qué aprendimos de las exploraciones realizadas?

Las reflexiones que nos ha proporcionado la puesta en escena de las actividades mostradas son las siguientes:

- La dependencia e independencia lineal de los polinomios de segundo grado no se relaciona con los puntos de intersección entre las parábolas asociadas con los mismos ni con la multiplicidad entre vectores.

- Los estudiantes buscan dar respuestas aquello que no logran entender con elementos conocidos y privilegian el aspecto algebraico para la su solución de las actividades propuestas.

Del grupo de estudiantes de ingeniería que participaron en la puesta en escena, se muestran dos de las respuestas que ellos dieron. La razón por la cual decidimos mostrar este extracto de su trabajo, es porque en el se pueden distinguir algunos de los rasgos que hemos encontrado en forma regular:

- Dan evidencia de que cuando hacen uso de la visualización como estrategia de estudio en el espacio de los vectores libres, ésta les puede ayudar en la reflexión y análisis de sus propuestas de solución y les permite replantear en cierto grado (cuando es necesario) las posibles correcciones de sus respuestas. Podemos considerar entonces que en dicho espacio vectorial, la visualización puede contribuir en el estudio de los conceptos de combinación lineal y de dependencia lineal.
- El reconocimiento de que la visualización se puede convertir en un obstáculo para caracterizar si un conjunto de polinomios de segundo grado es linealmente dependiente o independiente cuando se realiza la gráfica de las parábolas respectivas en el plano cartesiano.
- Manifiestan la necesidad de utilizar otras estrategias alternativas para lograr su objetivo, sin desprenderse de la propuesta emergida de lo geométrico, debido al rol de este, en su vida cotidiana.

De esta reflexión, se abren nuevas interrogantes ¿es el contexto de los objetos matemáticos lo que no permite ver con claridad los resultados? , ¿Qué hace que los estudiantes no puedan entender el concepto de combinación lineal con polinomios de segundo grado? ¿Por qué no entienden con la misma claridad el asunto se sumar o restar un vector (polinomios)?

¿Por qué en los polinomios el estudiante no puede decir en forma directa si el conjunto que se le presenta es o no linealmente dependiente?

Consideraciones finales

Hasta el momento haber identificado las dificultades inherentes con la naturaleza del álgebra lineal, permitió iniciar la búsqueda de material bibliográfico e investigaciones asociadas al estudio de la dependencia e independencia lineal. Proponemos hacer uso de la visualización para ponerla al servicio del estudio de un objeto matemático en particular, en el caso de los polinomios de segundo grado. Actualmente contamos con diversas exploraciones que centran su atención en esta categoría, y las utilizaremos como variables por atender en el diseño de las actividades didácticas de nuestra investigación. Las exploraciones realizadas hasta este momento nos permiten replantear algunas de las propuestas iniciales pues reconocemos que el estudio de los polinomios de segundo grado no tiene una interpretación inmediata y que por tanto debemos auxiliarnos de una transposición didáctica en el escenario de los vectores libres en tercera dimensión.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En Hitt, F., Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.55-80). Morelos, México.

Arcavi, A., Hadas, N. y Dreyfus, T. (1994). Engineering curriculum tasks on the basis of theoretical and empirical findings. En *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics (2),* (pp. 280–287). Portugal.

Adams, R. y Victor, M. (1993). *Principles of neurology*. Nueva York: McGraw.

Arcavi, A. (2007). Entrevista de podcast 19 por Mario Sánchez Aguilar, Obtenido el 10 de marzo de 2009 de http://matedupodcast.wordpress.com/2007/06/22/episodio-19-entrevista-con-abraham-arcavi/.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (10) 2*, 117-134.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números 55*, 3-22.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. and Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior 10*, 117–160.

Eisenberg, T. y Dreyfus T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem Representation in Linear Algebra. En J-L Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 191-207). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Nemirovsky, R. y Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics 33(2)*, 99–131.

Sierpinska, A**.** (1996). *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra, Research Conference in Collegiate Mathematics Education*. Michigan: Central Michigan University.