

OS PONTOS DE VISTA PRIVILEGIADOS NO ENSINO DA NOÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NO ENSINO SUPERIOR DO BRASIL

Lúcia Helena Nobre Barros, Marlene Alves Dias, Tânia Maria Mendonça Campos

UNIBAN. Universidade Bandeirantes de São Paulo

Brasil

lucianobre@ibest.com.br, alvesdias@ig.com.br, taniammcampos@hotmail.com

Campo de investigación: Pensamento matemático avançado

Nível: Superior

Resumo. *O objetivo dessa pesquisa é analisar os pontos de vista sobre a noção de derivada de uma função desenvolvida no Ensino Médio e que podem servir de apoio para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior. Para isso, escolhemos como referenciais teóricos centrais os pontos de vista de Thurston (1995) e a abordagem teórica em termos de pontos de vista de Rogalski (1995). Para melhor identificar as dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem da noção de derivada na transição Ensino Médio e Superior complementamos as análises utilizando as abordagens teóricas em termos de quadros de Douady (1984) e níveis de conhecimento de Robert (1997) e a teoria antropológica do didático de Bosch e Chevallard (1999). Os resultados encontrados mostram que pouca atenção é dada ao trabalho desenvolvido no Ensino Médio, não se levando em conta os conhecimentos prévios dos estudantes, o que pode justificar as dificuldades encontradas por esses nos primeiros anos do Ensino Superior.*

Palavras-chave: Pontos de vista, derivada, relações institucionais e pessoais, níveis de conhecimento

Introdução

As dificuldades apresentadas pelos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral têm sido objeto de estudo de várias pesquisas. Em geral, essas pesquisas se desenvolvem no Ensino Superior e no Brasil ainda não encontramos estudos referentes, especificamente, ao processo de e aprendizagem da noção de derivada de uma função na transição entre o Ensino Médio e Superior. Na seqüência quando nos referimos à derivada, trata-se da derivada de uma função.

Além disso, observamos que os trabalhos de Rogalski (1995) e Thurston (1995) colocam em evidência a importância da noção de pontos de vista no trabalho do matemático. Observamos que Rogalski apresenta uma definição de pontos de vista enquanto que Thurston, em seu trabalho, identifica sete pontos de vista para a definição de derivada. Ambos são matemáticos e escrevem sobre sua própria relação com a Matemática, lembrando que Thurston foi Medalha Fields em 1982. Apesar do trabalho de Thurston ter sido publicado desde 1995, não encontramos no Brasil pesquisas que consideram os pontos de vista por ele apresentados, apenas Dias (1998) o utiliza

em sua pesquisa sobre pontos de vista cartesiano e paramétrico em Álgebra Linear desenvolvida na França.

Sendo assim, em função de trabalhos anteriores que consideram a noção de pontos de vista no processo de ensino e aprendizagem de Matemática decidimos estudar, mais especificamente, quais pontos de vista, daqueles identificados por Thurston, são privilegiados no Ensino Superior brasileiro. Esse estudo é uma parte da pesquisa que estamos desenvolvendo sobre os pontos de vista em jogo na transição entre o Ensino Médio e Superior.

Para melhor compreender o que se espera do estudante do Ensino Superior quando se introduz a noção de derivada de uma função escolhemos analisar quais as relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e aprendizagem dessa noção no Ensino Superior e quais as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes.

Para operacionalizar nossas análises escolhemos como referências teóricas de apoio as abordagens teóricas em termos de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes de Robert (1997), de quadro e mudança de quadro de Douady (1984), e a teoria antropológica do didático de Bosch e Chevallard (1999), que além de definir relação institucional e pessoal, permite identificar as diferentes representações em jogo por meio das noções de ostensivo e não ostensivo, e as necessidades de um discurso que auxiliem no planejamento, execução, controle e justificativa das diferentes tarefas, isto é, as tecnologias das técnicas e as tecnologias das tecnologias que são por eles denominadas teorias e que podem ser propostas nos Planos de Ensino dos cursos de nível superior, ou seja, as relações institucionais esperadas

Para identificar as relações institucionais existentes construímos uma grade de análise, que será apresentada seguida de um exemplo, que permite identificar os diferentes tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias via livros didáticos mais utilizados no Ensino Superior. Verificamos, ainda, se existe coerência entre as relações institucionais existentes e as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes analisando uma macro avaliação proposta para o primeiro e o último ano do Ensino Superior.

Apresentamos abaixo, uma breve exposição dos referenciais teóricos escolhidos.

Referencial teórico da pesquisa

O referencial teórico central para essa pesquisa são os pontos de vista identificados por Thurston, apud Dias (1998) para a noção de derivada, cuja denominação sugere a escolha para a definição dessa noção, como é possível observar no texto abaixo:

Podemos pensar a derivada como: 1. Infinitesimal: a razão da mudança infinitesimal do valor da função pela mudança infinitesimal da variável. 2. Simbólico: a derivada de x^n é nx^{n-1} , a derivada de $\sin x$ é $\cos x$, a derivada de $f \circ g$ é $f' \circ g \cdot g'$, etc. 3. Lógica: $f(x) = d$ se e somente se, para cada ε , existe um δ tal que se $0 < |\Delta x| < \delta$ então $\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \varepsilon$. 4. Geométrico: a derivada é a inclinação da tangente ao gráfico, se o gráfico tem uma tangente nesse ponto. 5. Taxa: a velocidade instantânea de $f(t)$ se t é o tempo. 6. Aproximação: a derivada de uma função é a melhor aproximação linear dessa função próxima do ponto. 7. Microscópica: a derivada de uma função é o limite do que se observa com um microscópio aumentando cada vez mais (Thurston, 1995, apud Dias, 1998, p. 39).

Além disso, consideramos a definição dada por Rogalski (1995) para a noção de ponto de vista:

Dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentes maneiras de observá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de definí-los. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas, podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro (Rogalski, 1995).

Consideramos, ainda, a abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997), a saber:

Níveis de conhecimento esperados dos estudantes: *nível técnico que está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: Determinar a derivada da função $f(x) = x^2$; nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição de saberes de um certo domínio, podendo até corresponder a uma organização, nesse nível o que se questiona é explicitamente pedido. Exemplo: Determinar a derivada da função $f(x) = x^2$ utilizando a definição; nível disponível que corresponde a saber*

responder corretamente o que é proposto sem indicações, esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Exemplo: A função horária do movimento de uma partícula é $f(t) = e^{2t} - 1$. Calcule a velocidade escalar no instante $t = 10$ (Robert, 1997, apud Nobre Barros e Dias, 2009, pp.4-5).

A definição de níveis de conhecimento de Robert (1997) conduz às noções de quadro e mudança de quadros de Douady (1984), a saber:

[...] constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do domínio. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady, 1984, p.128).

A mudança de quadros é uma transposição do trabalho do matemático para a didática que Douady (1992) considera como:

[...] um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalente, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. [...] Qualquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, em suma, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares de trabalhos (Douady, 1992, pp. 135-136).

Após essa breve descrição do referencial teórico considerado na pesquisa, apresentamos a metodologia escolhida para desenvolver a investigação.

Metodologia da pesquisa

Para as análises propostas utilizamos a seguinte metodologia:

- Análise dos planos de ensino dos cursos de licenciatura de universidades brasileiras públicas e privadas, para identificar as relações institucionais esperadas.

- Análise dos livros didáticos indicados na bibliografia básica dos planos analisados, para identificar as possíveis relações institucionais existentes e verificar se essas são coerentes com as propostas de ensino.
- Análise de uma macro avaliação para o primeiro e o último ano do Ensino Superior, para verificar se existe a possibilidade de identificar as marcas das relações institucionais sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes.

Para efetuar as análises propostas acima, construímos a seguinte grade de análise.

A grade de análise

A grade deve servir como um instrumento para analisar as relações institucionais existentes e as marcas dessas relações sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes para o objeto de estudo da nossa pesquisa, isto é, a noção de derivada.

Essa grade permite identificar às seguintes variáveis das tarefas usualmente encontradas para a introdução da derivada de uma função.

- **Pontos de vista em jogo na tarefa;**
- **Ostensivos associados aos pontos de vista considerados;**
- **Quadro em que a tarefa é enunciada:**
- **Quadro para solução da tarefa;**
- **Níveis de conhecimento esperados dos estudantes.**

TAREFA: Determinar o coeficiente de variação de uma função, dada por seu gráfico, em um determinado ponto utilizando a noção de derivada.

EXEMPLO:

- O gráfico mostrado na figura fornece a relação entre o percentual do desemprego U e o correspondente percentual da inflação I . Use o gráfico para estimar a taxa na qual I muda com respeito a U , quando o nível de desemprego for 3%, e novamente quando ele for 10%.

SOLUÇÃO:

Da figura, estimamos a inclinação da reta tangente no ponto (3, 15), correspondendo a $U=3$, em aproximadamente igual a -14. Isto é, quando o desemprego é de 3%, a inflação I é decrescente a uma taxa de 14 pontos percentuais para cada ponto de aumento no desemprego U .

No ponto (10, 0), a inclinação da reta tangente é cerca de -0,4, o que significa que, quando há 10% de desemprego, a inflação é decrescente à taxa de somente 0,4 pontos percentuais para cada ponto percentual de aumento no desemprego.

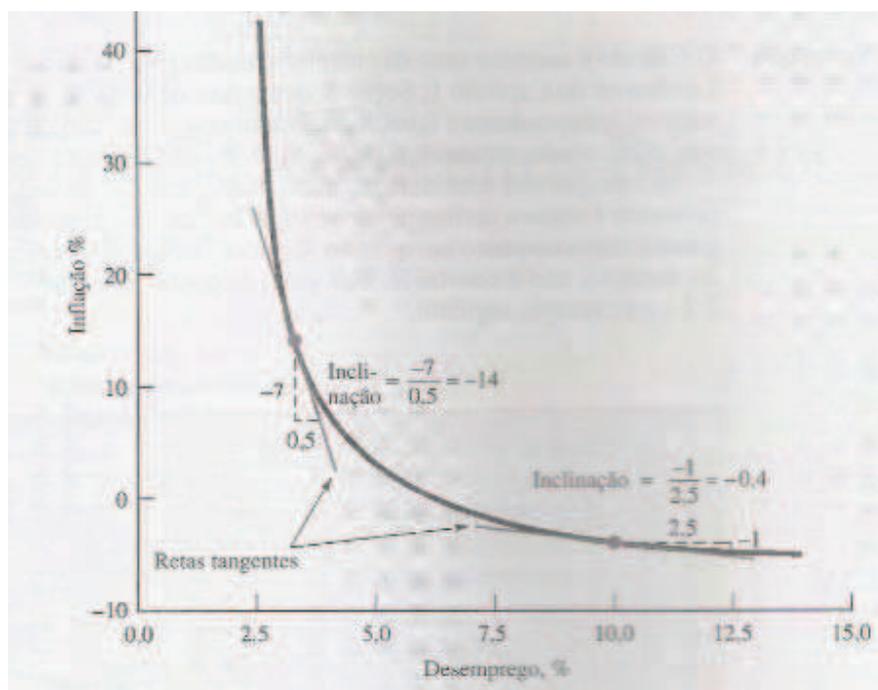


Figura 1. Inflação em função do desemprego, (Eisner, 1974, p.173 apud Hoffmann, 1999, pp. 69-70)

- **Pontos de vista em jogo na tarefa:** Pontos de vista geométrico e aproximação;
- **Ostensivos associados aos pontos de vista considerados:** Ostensivo de representação escrita simbólica explícita e de representação gráfica de uma função;
- **Quadro em que a tarefa é enunciada:** economia;

- **Quadro ou domínio para solução da tarefa:** análise matemática, em particular estudo das funções de uma variável real a valores reais;
- **Níveis de conhecimento esperados dos estudantes:**
 - Mobilizável em relação à noção de derivada enquanto taxa de aproximação, isto é, o ponto de vista aproximação;
 - Disponível em relação à articulação entre a noção de porcentagem e a noção de derivada e suas propriedades, isto é, crescimento e decrescimento e sinal da primeira derivada.

Resultados encontrados

A análise das relações institucionais esperadas mostra que não existe uma preocupação em introduzir a noção de derivada no Ensino Superior utilizando os pontos de vista já desenvolvidos no Ensino Médio, mesmo se as propostas privilegiam as representações gráficas que permitem uma melhor visualização do conceito antes de trabalhar os pontos de vista infinitesimal, simbólico e lógico. O mesmo ocorre para as relações institucionais existentes em que observamos que se privilegia a passagem da representação simbólica da função para representação gráfica utilizando a noção de derivada e a determinação da função dado seu gráfico. Mas, pouca atenção é dada à passagem do gráfico da derivada para o gráfico da função que termina sendo uma das questões pedidas na macro-avaliação Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) para o primeiro e o último ano do Ensino Superior, como mostra o extrato abaixo.

QUESTÃO 30 – DISCURSIVA

Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até a ordem 2, pelo menos, tal que $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(0) = -2$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$. O gráfico da derivada de primeira ordem, f' , tem o aspecto apresentado abaixo.

Com base nos valores dados para a função f e no gráfico de sua derivada f' , faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Na reta abaixo, represente com setas \nearrow ou \searrow os intervalos em que a função f é crescente ou decrescente, respectivamente. (valor: 2,0 pontos)

b) Calcule: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) =$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) =$ (valor: 1,0 ponto)

c) Quais são os pontos de máximo e de mínimo relativos (locais) de f ? (valor: 2,0 pontos)

d) Quais são os pontos de inflexão de f ? (valor: 1,0 ponto)

e) No sistema de eixos coordenados abaixo, faça um esboço do gráfico da função f . (valor: 4,0 pontos)

figura 2 . ENADE (Brasil, 2005)

Considerações finais

Em geral, a noção é introduzida após o estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica e os pontos de vista taxa e geométrico são utilizados como meios para a interpretação de gráficos dessas funções. Esse trabalho já tinha sido efetuado no Ensino Médio, mas não existe nenhuma referência aos estudos realizados anteriormente, isto é, eles são revisitados, mesmo que implicitamente, e permitem que os estudantes enriqueçam, diferenciem, elaborem e adquiram mais estabilidade em termos dos significados dos pontos de vista considerados e sejam capazes de compreender melhor os novos pontos de vista que devem ser introduzidos na seqüência.

Apesar de existir uma coerência entre as relações institucionais esperadas e existentes quando se consideram os pontos de vista identificados por Thurston para a noção de derivada e considerando ainda que mesmo implicitamente são considerados conhecimentos prévios supostos disponíveis, uma vez que se espera tenham sido desenvolvidos no Ensino Médio, não se observa o mesmo resultado nas macro avaliações.

Isso mostra que é necessário um trabalho árduo para que os estudantes possam realmente dar significado para os diferentes pontos de vista e aplicá-los de forma autônoma quando necessário, ou seja, para que eles possam utilizar esses conhecimentos de forma disponível como é o caso do exemplo de tarefa encontrado na macro-avaliação que termina deixando muitos estudantes sem condições de resolvê-lo.

Referências bibliográficas

Bosch, M. & Chevallard, Y., (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77- 123.

Brasil, Ministério da Educação (2005). *Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) – Exame Nacional de Desempenho do Estudante (ENADE)*. Ministério da Educação – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) – Brasília: MEC. Disponível no dia 10/02/2009: http://www.inep.gov.br/superior/enade/enade_oquee.htm.

Chevallard, Y.,(1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Grenoble : *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-112.

Dias, M. A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Paris, Université Paris VII.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris VII.

Douady, R. (1992) Ingénierie Didactique et evolution du rapport au savoir. Paris. *Repères IREM*, 6, 132-158.

Hoffmann, L. D. & Bradley, G. L. (1999). *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora.

Nobre Barros, L. H. & Dias, M. A., (2009). Os pontos de vista disponíveis para a Introdução de Derivada de uma Função na Transição do Ensino Médio e Superior [CD-ROOM]. *In: Anais do Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4*. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques*. 192-212

Rogalski, M. (1995). *Notas manuscritas do Seminário de São Paulo*. Brasil.

Thurston, W.P. (1995) Preuve et progrès en Mathématiques. Paris. *Repères IREM*, 21, 5-26