

## A ARTICULAÇÃO MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM ALGEBRA LINEAR

Tânia Maria Mendonça Campos, Fabio Simião, Marlene Alves Dias

UNIBAN

Brasil

taniammcampos@hotmail.com, fsmiao@yahoo.com.br, alvesdias@ig.com.br

Campo de investigación: Matrizes e Álgebra Linear

Nível: Médio e Superior

**Resumo.** *Apresentamos nesse artigo o estudo das relações institucionais esperadas e existentes para o ensino e aprendizagem da noção de matrizes, suas operações e propriedades no Ensino Médio e de matrizes e transformações lineares no Ensino Superior. Observamos que o objetivo de nossa pesquisa é identificar os conhecimentos prévios necessários para trabalhar a articulação entre as noções de matrizes e transformações lineares nos cursos de licenciatura em matemática. Para desenvolver as análises propostas na metodologia da nossa pesquisa construímos uma grade de análise utilizando as ferramentas teóricas de análise apresentadas na teoria antropológica do didático de Chevallard (1992) e Bosch e Chevallard (1999) e nas abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros de Douady (1984, 19992) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997). Os resultados encontrados mostram que é preciso considerar os conhecimentos prévios dos estudantes que iniciam o Ensino Superior para desenvolver o conteúdo escolhido de forma eficaz.*

**Palavras chave:** Transformações Lineares, relações institucionais e pessoais, matrizes.

### Introdução

No Brasil, estamos vivendo uma crescente defasagem em relação à Educação Básica, em especial, no Ensino Médio, ou seja, existe uma diversidade de relações institucionais que têm sido identificadas tanto nos resultados das macroavaliações quanto pelos professores das universidades que, em geral, reclamam da falta de alguns conhecimentos prévios e da dificuldade de desenvolver um trabalho em que o estudante se responsabilize pela sua aprendizagem.

Sendo assim, o objetivo dessa pesquisa é identificar os conhecimentos prévios que podem ser considerados disponíveis para se trabalhar a articulação entre as noções de matrizes e transformações lineares nos cursos de licenciatura em matemática.

Para isso, desejamos identificar quais desses conhecimentos já foram trabalhados no Ensino Médio e se existe possibilidade de apenas revisitá-los no Ensino Superior, em particular, quando se introduz a noção de matriz de uma transformação linear. Observando que a noção de transformação linear pode se apoiar sobre os conhecimentos de funções e suas propriedades, que se supõe disponível para os estudantes do segundo ano das licenciaturas, uma vez que essas

noções têm sido revisitadas na disciplina de cálculo diferencial e integral desses cursos, e que a noção de matriz de uma transformação linear só tem interesse para facilitar o trabalho matemático quando se dispõe de suas operações e propriedades.

Isso nos conduziu a estudar como a noção de matriz, suas operações e propriedades são trabalhadas no Ensino Médio, isto é, quais as relações institucionais existentes para seu ensino, de forma a poder tratá-la, pelo menos, como um conhecimento mobilizável que possa ser revisitado quando necessário, sem que haja necessidade de introduzir novamente a noção e trabalhá-la como um novo conhecimento. O que desejamos é nos apoiar sobre os conhecimentos desenvolvidos nas etapas anteriores da escolaridade para introduzir novos conhecimentos, pois isso permite que os estudantes dêem significado aos seus conhecimentos prévios e possam articulá-los com os novos conhecimentos, o que lhes possibilita resolver qualquer tipo de questão, mesmo quando o que se pede não está explicitado no enunciado. Para isso, escolhemos a teoria antropológica do didático de Chevallard (1992) e Bosch e Chevallard (1999) que permite estudar as relações institucionais esperadas e existentes, que aqui são analisadas via documentos oficiais e livros didáticos respectivamente. Além disso, consideramos as noções de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias e a questão da representação que é tratada por meio das noções de ostensivos e não ostensivos introduzidas por esses mesmos autores. Consideramos, ainda, as abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros conforme definição de Douady (1984) e níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997).

Uma vez escolhidas as ferramentas de análise, construímos uma grade de análise que permite estudar tanto as relações institucionais existentes como as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes.

Na seqüência apresentamos uma breve descrição do referencial teórico utilizado na pesquisa.

### **Referencial teórico da pesquisa**

Escolhemos, mais especificamente, as noções de relações institucionais, tarefas, técnicas, tecnologias, teorias, ostensivos e não ostensivos de Bosch e Chevallard (1999). Para a construção da grade de análise utilizamos as noções de quadro e mudança de quadros conforme definição de

Douady (1984, 1992) e os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1997).

Para Chevallard (1992) e Bosch e Chevallard (1999) tudo é objeto e quando esse é reconhecido por uma instituição, pode ser definido como uma relação institucional a esse objeto, que nesse trabalho é reconhecida por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Nova Proposta do Estado de São Paulo como as relações institucionais esperadas. Assim como os livros didáticos e o caderno do professor que são considerados como relações institucionais existentes. Nas instituições um objeto é reconhecido por meio de tarefas que para serem executadas necessitam de técnicas. Essas técnicas precisam ser justificadas e controladas dando origem às tecnologias ou discurso sobre as técnicas. As tecnologias por sua vez precisam ser compreensíveis e justificáveis dando origem às teorias.

Consideramos também a noção de ostensivo, isto é, os objetos de natureza sensível como os sons, os grafismos e os gestos, e os objetos não ostensivos como as noções, os conceitos e as idéias que só podem ser evocados por meio da manipulação adequada dos ostensivos que lhe são associados. Aqui observamos, ainda, a importância da noção de conhecimento prévio que segundo Moreira (2005) é fundamental para a teoria da aprendizagem significativa, pois o novo conhecimento deve interagir com os conhecimentos prévios. Julgamos, ainda, que é preciso considerar as diferentes relações institucionais que cada indivíduo foi submetido para que o novo conhecimento adquira significado e o conhecimento prévio fique mais rico, diferenciado e elaborado, adquirindo estabilidade.

Para melhor identificar como os conhecimentos prévios estão sendo trabalhados institucionalmente utilizamos a abordagem teórica sobre os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes conforme definição de Robert (1997), ou seja, o nível técnico que está relacionado às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: identificar o tipo de uma matriz. O nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição de saberes, podendo até chegar a uma organização. Mas, o que se questiona é explicitamente pedido. Exemplo: Encontrar o valor de  $x$  em uma igualdade de matrizes. O nível disponível que corresponde a uma organização dos saberes que possibilita responder corretamente o que é proposto sem indicações. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, ao fato de dispor de referências, de

questionamentos, de uma organização. Exemplo: Utilizar a representação matricial e a multiplicação de matrizes para determinar a composta de duas transformações lineares.

A definição de níveis de conhecimento de Robert (1997) conduz às noções de quadro e mudança de quadros de Douady (1992), a saber:

*[...] um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. (Douady, 1992, p.135, apud Andrade, 2006, p. 14).*

A mudança de quadros é uma transposição do trabalho do matemático para a didática que Douady (1992) considera como:

*[...] um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalente, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. [...] Qualquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, em suma, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares de trabalhos (Douady, 1992, p.135, apud Andrade, 2006, p. 15)*

Após essa breve apresentação do referencial teórico escolhido para a pesquisa, apresentamos a metodologia utilizada para atingir nosso objetivo que é identificar os conhecimentos supostos disponíveis para os estudantes do Ensino Médio em relação à noção de matrizes.

### **Metodologia da pesquisa**

A metodologia proposta para a pesquisa é a seguinte:

- Análise da nova proposta institucional para o ensino e aprendizagem da noção de matrizes, suas operações e propriedades via cadernos do professor da 2ª série do Ensino Médio 2º Bimestre distribuídos pela Secretaria de Educação do estado de São Paulo.

- Análise das propostas institucionais para o ensino de matrizes, suas operações e propriedades via Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM e PCN+);
- Análise das tarefas habitualmente encontradas para o ensino e aprendizagem da noção de matrizes, suas operações e propriedades via livros didáticos do PNLEM – Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio.
- Análise das Ementas das Universidades particulares e públicas do Estado de São Paulo para as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear, para verificar como e quando são trabalhados ou revisitados os conhecimentos prévios necessários para a introdução da noção de matriz de uma transformação linear.
- Análise das tarefas habitualmente desenvolvidas no Ensino Superior, quando se introduz a noção de matriz de uma transformação linear, via livros didáticos.

Para efetuar as análises das tarefas, construímos a seguinte grade de análise.

### A grade de análise

O primeiro conjunto de tarefas contribui para análise das relações institucionais existentes para o ensino e aprendizagem do conceito de matrizes, suas operações e propriedades, para o Ensino Médio e correspondem as noções que podem ser revisitadas no Ensino Superior. Já o segundo conjunto apresenta as possíveis relações institucionais existentes para o ensino de transformação linear e matriz de uma transformação linear.

Esse conjunto de tarefas permite identificar a diversidade de relações institucionais existentes em função das variáveis dessas tarefas, que podem ser exploradas com os estudantes desde a segunda série do Ensino Médio quando se tratam da noção de matrizes, suas operações e propriedades.

As *tarefas* usualmente encontradas para a noção de matrizes no Ensino Médio são:

- Tarefa 1: Representar a tabela na forma matricial e identificar o tipo ou a ordem da matriz;
- Tarefa 2: Representar matricialmente uma tabela de frequência e analisá-la;
- Tarefa 3: Através da representação genérica, escrever a matriz identificar a posição de cada elemento;
- Tarefa 4: Identificar a ordem e o tipo da matriz e os elementos da diagonal principal e secundária;
- Tarefa 5: Estabelecer igualdade entre matrizes;
- Tarefa 6: Efetuar a adição de matrizes trabalhando também com as propriedades da adição de matrizes;
- Tarefa 7: Identificar a matriz oposta de uma matriz dada;
- Tarefa 8: Efetuar a subtração de matrizes;
- Tarefa 9: Multiplicar um número real por uma matriz dada;
- Tarefa 10: Determinar a transposta de uma matriz;
- Tarefa 11: Determinar matriz simétrica, anti-simétrica utilizando a igualdade de matrizes.
- Tarefa 12: Verificar se existe e determinar o produto entre duas matrizes;
- Tarefa 13: Determinar a Matriz inversa de uma matriz dada utilizando o sistema de equações;
- Tarefa 14: Obter uma matriz, através de uma equação matricial;
- Tarefa 15: Utilizar os conhecimentos adquiridos trabalhando com objetos em computação gráfica.
- Tarefa 16: Transformar um grafo em matriz.

As *tarefas* encontradas para transformação linear e matriz de uma transformação linear para o Ensino Superior são:

- Tarefa 1: Verificar se a transformação de um espaço em outro espaço é uma transformação linear, dada a operação.
- Tarefa 2: Verificar se a transformação de um espaço em outro é um operador linear, dada a operação;
- Tarefa 3: Determinar o núcleo e a imagem de uma transformação linear;
- Tarefa 4: Mostrar que o operador linear é um automorfismo e determinar sua inversa;
- Tarefa 5: Mostrar que uma transformação linear é um isomorfismo;
- Tarefa 6: Determinar a matriz de uma transformação linear em relação as canônicas dos espaços em que a transformação está definida;
- Tarefa 7: Determinar a representação matricial de uma transformação linear dadas as bases dos espaços vetoriais em que a transformação está definida;
- Tarefa 8: Determinar a composta de duas transformações lineares;
- Tarefa 9: Determinar a inversa de uma transformação linear;
- Tarefa 10: Reconhecer as transformações geométricas (translação, rotação, simetria, cisalhamento) de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  por meio da matriz da transformação sendo ela linear ou não.

## Resultados Encontrados

### *Comentários sobre as relações institucionais esperadas*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) propõe que no Ensino Médio devemos preparar os estudantes para o mundo do trabalho. Sendo assim, é importante que se considere no processo de ensino e aprendizagem a participação ativa dos estudantes que possam ser mediadores das próprias informações. Em relação à noção de matrizes as expectativas são para que os professores desenvolvam esse conteúdo mostrando sua importância nas diferentes áreas do conhecimento, em particular, no estudo das transformações geométricas do plano que podem ser identificadas por meio do ostensivo de representação matricial. Nesse momento, o estudo das transformações geométricas do plano permite trabalhar com o novo ostensivo de representação para o não ostensivo transformação geométrica desenvolvido no Ensino Fundamental e revisitado nesse momento em outro contexto.

Assim o objetivo da matemática no Ensino Médio é oferecer as ferramentas que possam favorecer a contextualização das práticas enquanto pessoa humana e profissional. Dessa forma, as tarefas nos mais variados conteúdos têm que estar disponibilizadas de forma a provocar no estudante à compreensão do mundo exterior, por meio da matemática.

O estudante do Ensino Médio será o futuro ingressante do Ensino Superior, em particular, nos cursos de licenciatura em matemática, alvo de nossa pesquisa. Fica, assim, a cargo do professor garantir o ensino de conteúdos essenciais que possam favorecer o processo de ensino e aprendizagem de modo que o estudante possa continuar seus estudos.

A análise dos planos de ensino de 3 universidades públicas e 3 universidades privadas mostram que existe uma tendência em retomar conteúdos já trabalhados no Ensino Médio na tentativa de suprir as necessidades dos estudantes. O que mostra a importância do nosso estudo que prevê a identificação dos conhecimentos prévios que podem ser supostos disponíveis e que assim seriam apenas revisitados quando da introdução de novos conhecimentos na universidade.

*Comentários sobre as relações institucionais existentes*

Ao analisarmos as relações institucionais existentes observamos que as tarefas abordadas possibilitam desenvolver as ferramentas necessárias em relação ao estudo de matrizes, como propõem os documentos oficiais.

O livro didático desenvolve uma seqüência de tarefas que possibilitam ao estudante adquirir pressupostos básicos, oferecendo os requisitos necessários para continuidade de seus estudos no Ensino Superior, em especial, quando se considera a noção de matrizes, suas operações e propriedades.

Logo, nos parece mais adequado desenvolver o curso de Álgebra Linear apenas revisitando essas noções, quando necessário, nesse novo contexto.

Em geral, os livros didáticos para o Ensino Superior têm introduzido a noção de matrizes, suas operações e propriedades e sistemas lineares antes de desenvolver as noções de espaço vetorial de dimensão finita, combinação linear, base e dimensão e transformação linear. Tanto a noção de matriz como a noção de sistemas lineares homogêneos são utilizadas como exemplos de espaços vetoriais de dimensão finita e permitem o estudo das noções de combinação linear, base e dimensão.

Esse trabalho é essencial para a introdução da noção de matriz de uma transformação linear, que termina ficando para o final do curso e, conseqüentemente, e não pode ser explorada em toda a sua potencialidade.

Observamos por meio da macro-avaliação Exame Nacional de Avaliação de Desempenho dos Estudantes (ENADE), que avalia os estudantes do primeiro e último ano do Ensino Superior, que as questões sobre transformações lineares privilegiam os ostensivos de representação gráfica e matricial que são supostamente trabalhados desde o Ensino Médio e, portanto, não deveriam apresentar tantas dificuldades, principalmente, para aqueles que serão os futuros professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio.



### Considerações finais

Nossa experiência mostra que, em geral, os estudantes que iniciam o Ensino Superior dispõem das ferramentas associadas às noções de matriz, suas operações e propriedades, de diferentes métodos de resolução de sistemas lineares e dos ostensivos de representação matricial desses sistemas. Suas dificuldades estão associadas à discussão das possibilidades de solução que é justamente a ferramenta que eles necessitam para representar os subespaços de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , ...,  $\mathbb{R}^n$  e determinar uma base e a dimensão desses subespaços.

Observamos, ainda, que os estudantes dominam rapidamente as técnicas de passagem do ostensivo de representação no espaço das transformações lineares para o ostensivo de representação no espaço das matrizes quando eles compreendem as noções de combinação linear, base e dimensão. Portanto, nos parece importante que se considere os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à noção de matrizes adquiridos no Ensino Médio tornando-os mais ricos e diferenciados e possibilitando que o novo conhecimento tenha significado para os estudantes.

Lembramos que conforme afirma Moreira (2005).

*Sabemos que a aprendizagem significativa caracteriza-se pela interação entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio. Nesse processo, que é não-literal e não-arbitrário, o novo conhecimento adquire significados para o aprendiz e o conhecimento prévio fica mais rico, mais diferenciado, mais elaborado em termos de significados, e adquire mais estabilidade. [...] Sabemos, também, que o conhecimento prévio é, isoladamente, a variável que mais influencia a aprendizagem. Em última análise, só podemos aprender a partir daquilo que conhecemos.[...] (Moreira, 2005, p.13)*

Parece-nos importante não iniciar a introdução de um novo conhecimento sem diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes para que se possa torná-los mais estáveis. Isso permitirá que os estudantes sejam capazes de mobilizar ou dispor de seus conhecimentos para articulá-los no momento em que precisem resolver problemas e situações encontrados na própria matemática, nas outras ciências e no mundo do trabalho.

### Referências bibliográficas

- Andrade, S. N. (2006) *Possibilidade de articulação entre as diferentes formas de conhecimento: A noção de função afim*. Dissertação de Mestrado não publicada, Unicsul, São Paulo.
- Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Grenoble: *Recherches en didactique des mathématiques*. 19(1), 77-123.
- Brasil. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC, SEF.
- Brasil, (2000) *Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio*. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC, SEMTEC.
- Brasil. (2006). *Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio + : Ciências da Natureza e suas tecnologias*. Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: MEC, SEMTEC. Acesso em: 20/03/2010 Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>.
- Brasil. (2008) *Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2009*.: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.
- Chevallard, Y., (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.
- Dante, L. R. (2004) *Matemática*. São Paulo : Ática.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Paris : IREM de l'Université de Paris VII.
- Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.
- Moreira, M.A.(2005) *Aprendizagem Significativa Crítica*. Porto Alegre: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul..
- Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. En *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate* (pp. 193-212). França: Houlgate.

São Paulo (2009) *Caderno do professor: Matemática, Ensino Médio – 2ª série, 2º bimestre*. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.

São Paulo. (2008) *Nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.