UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA. RESULTADOS DE SU IMPLEMENTACIÓN

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento variacional Nivel: Medio y Superior

Resumen. *En el ámbito de la investigación en Matemática Educativa son conocidas las dificultades que plantean la enseñanza y el aprendizaje de contenidos del cálculo. En la búsqueda de alternativas que favorezcan un desarrollo adecuado de métodos de pensamiento propios de la matemática, diseñamos y pusimos a prueba una secuencia didáctica para la introducción del concepto de derivada.*
Consideramos como hipótesis básica que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión y apropiación de esta noción, adoptando la posición de que el manejo de sistemas de representación es fundamental para la actividad cognoscitiva del pensamiento. Presentamos algunas de las actividades trabajadas en clase y un breve análisis sobre su implementación y las respuestas de los alumnos.
Palabras clave: Pensamiento variacional, derivada, diferentes representaciones

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje del cálculo constituyen uno de los mayores desafíos de la educación actual. Existe consenso en que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma mecánica cálculos de derivadas, primitivas y resolver algunos problemas, estas acciones están muy alejadas de lo que significa una verdadera comprensión de los conceptos involucrados y un desarrollo adecuado de métodos de pensamiento. Esto plantea la necesidad de preguntarnos qué enseñamos y cómo enseñamos de manera de modificar esta situación y lograr que el alumno pueda comprender y dar sentido a los conceptos.

En el marco de la Matemática Educativa se han realizado en las últimas décadas numerosas investigaciones en las que estas cuestiones son abordadas desde diferentes perspectivas. Debido a lo complejo de los procesos que se ponen en juego (abstracción, demostración, generalización, visualización) se ubican dentro del campo denominado pensamiento matemático avanzado (Cantoral, 2003).

En el estudio de las circunstancias que permiten construir conocimiento se resalta la necesidad de analizar la relación de los conceptos con prácticas socialmente compartidas y con sentidos y significados extra matemáticos (Cantoral, 2003). Con la prioridad de dotar a las investigaciones de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento (su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, el plano cognitivo y el didáctico), surge lo que se ha denominado “acercamiento socioepistemológico”.

Bajo esta aproximación se encuentra la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional, cuyos trabajos se orientan al desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto al nivel de los procesos como de los conceptos propios del cálculo, principalmente de función, límite, continuidad, derivada, convergencia y analiticidad, basados en ideas variacionales (Cabañas y Cantoral, 2007).

Lo hasta aquí descrito conforma el marco teórico general de nuestro trabajo. Como marco teórico de comprensión de los objetos matemáticos consideramos la “Teoría de los Registros Semióticos” de Raymond Duval, quien plantea la importancia de los sistemas de representación en el sentido que no sólo son necesarios para fines de comunicación sino que resultan imprescindibles para la actividad cognoscitiva del pensamiento (Duval, 1998).

Todo concepto matemático necesita de representaciones ya que no se dispone de objetos para mostrar en su lugar y sólo por medio de éstas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Las representaciones algebraicas, tablas, gráficas y expresiones verbales que contienen la misma información, ponen en juego diferentes procesos cognitivos, cada uno relacionado con los otros. Aprender matemática consiste en el desarrollo progresivo de coordinaciones entre diferentes representaciones.

Nos propusimos tomar una de las nociones básicas del cálculo diferencial: la derivada. Diseñamos y pusimos a prueba una secuencia didáctica para la introducción de este concepto.

En términos metodológicos el trabajo se desarrolló en tres momentos generales: el diseño y análisis a priori de la secuencia, su implementación y, por último, el análisis de los resultados y su valoración, esencialmente cualitativa. Por razones de espacio a continuación presentamos sólo algunos aspectos de cada etapa.

Diseño de la secuencia

Desde sus orígenes el cálculo se caracterizó por un componente fundamentalmente visual e intuitivo en interacción constante con problemas geométricos y físicos. El análisis de fenómenos variacionales es lo que llevó al estudio de la derivada y al desarrollo del cálculo.

Ser la matemática de la variación y el cambio lo convierte en la rama que permite modelar, explicar, predecir y cuantificar el movimiento. Sin embargo, en el sistema educativo actual el cálculo ha perdido este enfoque y se han priorizado procesos de construcción y validación formales así como sus aspectos algorítmicos.

Los estudios realizados nos llevaron a considerar que el desarrollo de ideas variacionales puede propiciar una mejor comprensión de la derivada. Tomamos esto como hipótesis básica para la elaboración de la secuencia. La idea es, siguiendo a Dolores (2007a, p. 198):

> *...ubicar como eje rector de todo el curso de Cálculo Diferencial al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica.*

Tuvimos en cuenta además las ideas de Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas (1996) con respecto a la necesidad de partir de las concepciones previas de los alumnos acerca de la velocidad, utilizando las representaciones gráficas de las funciones para visualizar ideas.

La interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente a una curva en un punto constituye otro aspecto fundamental en la construcción del concepto de derivada. Sin embargo, su presentación como un proceso de aproximación de una secante a la tangente, resulta de gran dificultad didáctica (Dolores, 2007b).

A partir de esto, las actividades fueron diseñadas de manera que permitan organizar la enseñanza en torno a situaciones inmersas en contextos variacionales, donde exista la necesidad de estudiar cambios entre magnitudes en fenómenos presentados en diversas representaciones (algebraica, numérica, gráfica y verbal), y que exijan además el uso de las rectas secante y tangente para caracterizar dichos cambios.

Implementación de la secuencia. Presentación y valoración de resultados

La secuencia se llevó al aula con alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral en el año 2008. Para su desarrollo se dedicaron siete horas reloj distribuidas en cuatro clases. La primera parte de cada clase se dedicó a repasar lo desarrollado en la anterior. Teniendo en cuenta la importancia de la interacción en la construcción de los conceptos, los alumnos resolvieron las actividades en grupos de a dos. El profesor apoyó a los equipos, atendiendo las preguntas pero intentando que ellos mismos encontraran las respuestas. En la última parte de cada clase se hizo una discusión grupal, revisando las distintas actividades y aprovechándolas para formalizar los conceptos.

A continuación enunciamos cuatro de las actividades propuestas y un breve estudio de las producciones de veintitrés equipos, resaltando las principales dificultades detectadas. Tuvimos en cuenta, en relación a los contenidos, los aspectos variacionales presentes en cada situación. En cuanto al análisis de la comprensión, observamos el grado de coordinación de las distintas representaciones, la posibilidad de realizar transformaciones en un mismo sistema y la manera en la que logran transitar de un registro a otro.

Las actividades que siguen corresponden a la primera clase. En ésta se llegó a discutir el concepto de velocidad instantánea y se planteó la necesidad de determinarla en el caso de un movimiento no uniforme. Se trabajó la idea de que el cálculo de la velocidad promedio cuando la amplitud del intervalo tiende a cero es una aproximación de la velocidad instantánea. Es importante aclarar que los alumnos ya habían desarrollado el tema "Límite".

Actividad. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (en segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t2 - t1$ y $s(t2) - s(t1)$ calculadas para uno de los intervalos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			

¿Qué concepto físico representan los valores de la última columna de la tabla?

¿Cuál es la interpretación geométrica de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$?

¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto? ¿Cuál es la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciado el movimiento?

En esta actividad se observó confusión al leer la tabla. En las columnas correspondientes a Δt y Δs los alumnos sabían que se refería a variación pero confundían las variables.

Al pedirles la interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, sólo cinco equipos (22%) respondieron correctamente. Esto nos muestra cómo, a pesar de que los alumnos utilizan algunas nociones relacionadas con la pendiente (la identifican con el coeficiente del término lineal de la ley y la asocian con la inclinación de la recta), no manejan los aspectos variacionales que les permitirían hacer una correlación entre la razón de cambio media en situaciones de cambio constante con la pendiente de la recta correspondiente.

Con respecto a la velocidad del móvil a los dos segundos, algo más del 50% (doce equipos) respondió correctamente. Sin embargo, notamos que habiendo manifestado que la velocidad es constante, casi todos recurrieron a la fórmula espacio sobre tiempo para calcularla, de lo que deducimos que no interpretan correctamente la noción de velocidad instantánea o qué implica en el movimiento que los cambios se mantengan constantes.

En relación a los registros, no se observaron grandes dificultades para convertir del registro algebraico al numérico, pero sí al gráfico. La gran mayoría no fue capaz de interpretar las medidas de los cambios en la representación gráfica.

Actividad. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por s(t) = –2t2 + 8t + 2 metros, donde el tiempo t se mide en segundos.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$		
$1 \le t \le 2$		
$2 \le t \le 3$		
$3 \le t \le 4$		

Represente gráficamente la función y complete la tabla.

¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

Esta actividad es similar a la anterior pero en este caso la función corresponde a un movimiento variado. Se agrega la dificultad de cambios de posición negativos.

Al completar en la tabla la columna correspondiente a las velocidades medias, los alumnos se preguntaban el porqué de los signos negativos. Varios lograron relacionarlos con la dirección de la trayectoria. Sin embargo, al determinar la velocidad a los tres segundos, ningún grupo dio como respuesta un valor negativo.

Para calcular su valor, casi todos los equipos recurrieron a la fórmula espacio sobre tiempo, considerando el espacio recorrido hasta los tres segundos o la posición en dicho instante. Un solo grupo demostró haber comprendido la situación. Escribió: "*la velocidad a los tres segundos no la podemos calcular por regla de tres porque no es constante*".

A la pregunta sobre el comportamiento de la velocidad en todo el trayecto, ocho equipos (35%) dieron respuestas aceptables, limitándose a expresar que cambia o no se mantiene constante. Los demás intentaron dar más detalles y cometieron errores, mostrando que asocian velocidad con rapidez y confunden velocidad con posición.

Observamos que las dificultades no se relacionaron en general con el trabajo en un registro u otro, sino con la interpretación de las distintas cuestiones planteadas.

Actividad. Para estudiar el movimiento de una partícula, un investigador la ha iluminado mediante un flash que lanza destellos instantáneos a intervalos de 0,1 segundo. Tomando medidas sobre una fotografía, ha registrado los espacios recorridos por la partícula en los instantes que se muestran en la tabla.

Instante t (en segundos)	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4
Espacio e recorrido hasta el instante t	12	12,37	12,68	12,93	13,13	13,28	13,5	16

a) El investigador intentó determinar la velocidad exacta de la partícula en t = 2 segundos mediante la fórmula $\frac{\Delta e}{\Delta t}=\frac{e(t_2)-e(t_1)}{t_2-t_1}$ haciendo coincidir el instante inicial y el final del intervalo, es decir considerando t1 = 2 y t2 = 2. ¿Qué puede observar si realiza este procedimiento?

b) Complete la tabla con los espacios recorridos y las velocidades medias de la partícula en el intervalo [2, t] teniendo en cuenta que los valores de t son los que aparecen en la primera fila de la tabla anterior.

Intervalo [2,t]	[2;2,1]	[2;2,2]					
Espacio recorrido en el intervalo [2,t]							
Velocidad media en el intervalo [2,t]							

Según los cálculos realizados, ¿cuál de los valores para la velocidad media es una mejor aproximación de la velocidad en el instante t = 2 segundos? Explique.

Esta actividad, con la que se busca que los alumnos descubran la imposibilidad de calcular la velocidad en un instante a partir de la fórmula de velocidad media y reflexionen sobre la amplitud de los intervalos, no fue respondida por diez equipos (43,5%). Se presentaron muchas dificultades pero las ideas que se buscaba generar surgieron en varios equipos.

Con respecto al inciso a) los resultados fueron positivos ya que, la mayoría escribió alguna conclusión que consideramos correcta (no se puede calcular, no existe, es error).

Al completar la tabla del segundo inciso varios grupos manifestaron "esto tiene una idea de límite". Siete equipos (es decir un 30 % del total) eligieron correctamente la mejor aproximación, explicando que es la calculada en el intervalo más corto de tiempo.

Los resultados fueron retomados en el debate grupal para trabajar nuevos conceptos: en los fenómenos que cambian a cada instante, la velocidad en determinado intervalo no alcanza para determinar el comportamiento preciso de los cambios. Los alumnos reflexionaron sobre el hecho de que la velocidad instantánea no es lo misma que la media y por lo tanto no se puede calcular de la misma manera. El planteo en el registro numérico facilitó el cálculo de los espacios recorridos y las velocidades medias.

Actividad. La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto del tiempo medido en segundos está dada por la ley s(t) = t3.

a) Complete la tabla, considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí.

$t_0 \le t \le t_1$	$1{,}9 \le t \le 2$	$1{,}99 \le t \le 2$	$1{,}999 \le t \le 2$	…→		← …	$2 \le t \le 2{,}001$	$2 \le t \le 2{,}01$
Δt				… →		←…		
Δs				… →		← …		
$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$				… →		← …		

b) Según el acercamiento realizado**,** ¿qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t = 2? ¿Si Δt es infinitamente pequeño, se continuará cumpliendo esta conjetura?

c) Obtenga la velocidad media $\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ de la partícula en el intervalo [2, 2 +Δt]. Interprete geométricamente la expresión obtenida.

d) Teniendo en cuenta lo analizado en el inciso **b)**, ¿cuál es el significado de $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$? Calcule el límite. ¿Qué observa?

e) Calcule $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ e interprete física y geométricamente el resultado.

Esta actividad se presentó a los alumnos en la última clase e integra todos los contenidos desarrollados. Anteriormente los alumnos trabajaron con problemas que los llevaron a relacionar el concepto de razón de cambio media con la pendiente de la recta secante y la razón de cambio instantánea con la pendiente de la recta tangente a una curva.

En los primeros incisos se retoma, numéricamente, la idea de que con cambios cada vez más pequeños para la variable independiente, la aproximación es cada vez más exacta, pretendiendo además que descubran la necesidad del paso al límite.

A partir de la tabla, aproximadamente la mitad de los grupos lograron conjeturar sobre la velocidad de la partícula en el instante y el comportamiento en caso de que los intervalos sean infinitamente pequeños. Las mayores dificultades se presentaron en los últimos tres incisos, con el trabajo algebraico y la interpretación física y geométrica de los resultados.

Al finalizar el docente retomó en el pizarrón todo lo trabajado y, a partir de las conclusiones presentó la definición de derivada de una función en un punto.

Reflexiones

La secuencia desarrollada dio oportunidad a los alumnos de trabajar distintos aspectos variacionales del concepto de derivada. Se intentó en todo momento obtener la máxima información posible de cada una de las situaciones representadas, de manera de favorecer el desarrollo de su pensamiento y lenguaje variacional.

Se corroboró la importancia de la coordinación de diversos registros de representación en la comprensión observando cómo ciertos registros favorecen más que otros determinados aspectos. Los resultados fueron mejores al trabajar en el registro numérico, presentando mayores dificultades en el gráfico y en el algebraico.

La modalidad de trabajo motivó a los alumnos a la búsqueda de sus propias estrategias de solución, promoviendo un aprendizaje más activo y el trabajo cooperativo. La interacción con sus pares llevó a la discusión de distintas soluciones, produciendo explicaciones que dieron lugar a procesos de argumentación y demostración.

Según lo observado en el desarrollo de las clases y en los trabajos posteriores (parciales y evaluaciones finales) la resolución de las actividades les permitió desarrollar una idea correcta de la noción de derivada a un número considerable de alumnos.

Todos estos factores y los resultados alcanzados nos llevan a considerar la propuesta como positiva tanto para los alumnos como para nosotras. La observación del trabajo en clase y el análisis de los trabajos escritos nos permiten profundizar en sus pensamientos lo que resulta fundamental en el intento de producir cambios positivos en la enseñanza.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 2-25), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Cantoral, R. (2003). Pensamiento matemático avanzado: una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza. *Desarrollo del pensamiento matemático*. (pp. 205-218). México: Trillas.

Dolores, C. (2007a). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp.169-204), México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2007b). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.