

OBSTÁCULOS, DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Mariela Lilibeth Herrera Ruiz

Unidad Educativa Nacional: "Creación Barrio 19 de Abril"

marielalilabeth@gmail.com, marililabeth@yahoo.es

Campo de investigación: Pensamiento numérico

Venezuela

Nivel: Medio

Resumen. Este artículo constituye el reporte de una investigación que pretende describir los problemas y conflictos cognitivos que surgen en estudiantes de 3º año de educación media durante el aprendizaje de los números irracionales, conflictos interrelacionados con la teoría propuesta por Socas (1997) sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. Para ello, se recolectaron los cuadernos y las evaluaciones escritas de los estudiantes, y se diseñó y aplicó un cuestionario.

La investigación pretende explorar el primer contacto de los estudiantes en la educación formal con los números irracionales en las condiciones habituales en la que tiene lugar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y asimismo, resaltar la importancia del rol investigador del docente, ya que al investigar dentro de su salón del clase el docente puede realizar una descripción detallada y densa de la realidad, ya que forma parte del contexto educativo.

Palabras clave: dificultades, obstáculos, errores, números irracionales

Introducción

La aplicación del Teorema de Pitágoras a los lados y a la diagonal del cuadrado evidenció la existencia de los inconmensurables, y el surgimiento de los Números Irracionales desencadenó una crisis de los fundamentos de matemática en la época griega cuando sólo se reconocían como números a los naturales y a ciertas fracciones. Esta crisis involucró a tres nociones matemáticas: el número y su concepción entera, finita y positiva, el principio de no contradicción que propició el rechazo de los irracionales al conllevar a la paridad de los números impares como consecuencia de suponer la diagonal conmensurable, y por último, el campo operativo donde se realizan las operaciones por estar inmerso el número. Por todo esto, esta crisis desencadenó la reflexión del concepto de número y el desarrollo de una teoría para los irracionales desde la reestructuración de las ya concebidas. Sin embargo, es hasta el siglo XIX que Dedekind (1831-1916) introduce las "cortaduras" para realizar la construcción formal de los números reales.

Por lo controversial de su historia, resulta de especial interés el aprendizaje de los irracionales, sobre todo porque el conocimiento de las operaciones y sus propiedades se requiere para temas tan importantes como: el Teorema de Pitágoras, la distancia entre dos puntos, la ecuación ordinaria

de la circunferencia, el cálculo de áreas, la resolvente, las sustituciones trigonométricas. Aunado esto, a que los números reales que constituyen la base del análisis matemático, y del desarrollo del pensamiento numérico.

Bases Teóricas

El marco teórico soporte de esta investigación se fundamenta en la adopción de la teoría propuesta por Socas (1997) en su tesis doctoral sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria, las dimensiones afectivas descritas por Gómez (2000), la teoría de obstáculos de Brousseau (1976) y la teoría de errores de Radatz (1979).

Para Socas (1997) “las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de las Matemáticas” (p.35), de manera que éstas vienen a ser el resultado de un combinación de elementos intramatemáticos (objetos, procesos, simbolismo, etc.) y extramatemáticos (cognición, actitudes, etc.). La clasificación que hace este autor de las dificultades obedece a la naturaleza de su origen:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas: se relaciona con el lenguaje en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos y el lenguaje cotidiano como mediador en la interpretación de los signos.*
- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático; los ejemplos, los dibujos en el pizarrón, las imágenes estandarizadas, pueden generar errores.*
- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas: los métodos de enseñanza deben ser acordes con la organización institucional escolar y la secuencia curricular.*
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos: al momento de diseñar los recursos y estrategias en la enseñanza se deben considerar las etapas del desarrollo cognitivo de los estudiantes, sus características y capacidades.*

- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas:* en esta investigación el dominio afectivo comprende las: creencias, actitudes y emociones, que actúan como fuerza impulsadora o de resistencia al cambio de la actividad matemática.

Los obstáculos son dificultades propias del sujeto que conoce, causales de estancamiento y retroceso, es un conocimiento que por diversos motivos se han convertido en trabas. En cuanto a los tipos de obstáculos que se presentan en el sistema didáctico Brousseau (1976) distingue tres: *de origen epistemológico*, se les puede encontrar en la historia de los mismos conceptos, no quiere decir que se deben reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde se les ha vencido; *de origen didáctico*, resultado de elecciones didácticas que se hacen para establecer la situación de enseñanza; y *de origen ontogénico* o psicogénico, debido a las características del desarrollo del niño. En esta investigación sólo se consideraran los obstáculos epistemológicos y didácticos.

En cuanto a los errores, Radatz (1979) plantea su análisis puede ayudar a clarificar cuestiones elementales del aprendizaje de las matemáticas y los categoriza en cinco clases:

- *Dificultades del lenguaje:* los errores se derivan del uso inadecuado o erróneo de los símbolos y términos matemáticos, por lo que su aprendizaje se realizó inadecuadamente.
- *Dificultad para obtener información espacial:* este tipo de error se genera de las representaciones icónicas inadecuadas de situaciones matemáticas.
- *Aprendizaje deficiente de los prerrequisitos:* son causados por deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos para las tareas matemáticas adquiridos previamente.
- *Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento:* se relacionan con la inflexibilidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas, y se subdividen en cuatro tipos: por perseverancia, de asociación, de inferencia, y de asimilación.
- *Aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes:* los errores son producidos cuando se emplean reglas o estrategias análogas en contenidos diferentes, ya el razonamiento por analogía no siempre funciona en Matemática.

Objetivos de la investigación

El objetivo de esta investigación es explicar los errores que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales, a partir de las dificultades y obstáculos, contemplando como objetivos específicos:

- Diagnosticar las dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de los números irracionales.
- Diagnosticar los errores que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.
- Describir los obstáculos que presentan los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje los números irracionales.

Metodología

La reconstrucción y análisis de la realidad del fenómeno contempló una exploración metódica, minuciosa, comprensiva, desprejuiciada y profunda del proceso en estudio y se realizó a partir de las observaciones de los estudiantes en el salón de clases en las condiciones habituales en las que tiene lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, privilegiando las actitudes y comportamientos espontáneos, es decir, se interpretaron las conductas de los estudiantes en su ambiente natural, se empleó un enfoque cualitativo y dado que la información fue aportada por el propio sujeto de estudio y que los hechos serán examinados en un contexto y sujetos específicos, el diseño corresponde al de estudio de casos, a la tipología de caso único y a la modalidad de micro-etnografía.

Los procedimientos de la investigación se dividirán en función de los objetivos específicos, y de acuerdo a la noción que se pretende comprender de la siguiente manera:

- *Para indagar las dificultades en el aprendizaje de los números irracionales:* se diseñó, validó y aplicó un cuestionario. A los datos obtenidos se le aplicó un análisis de contenido, empleando la reducción, la codificación y la representación a través de matrices.
- *Para indagar los obstáculos en el aprendizaje de los números irracionales:* se realizó un registro anecdótico, se recolectaron artefactos (los cuadernos de los Informantes Claves). Se

analizaron los registros, considerando: contenido desarrollado, ejercicios realizados por el profesor, ejercicios planteados, intervención de los estudiantes, y comportamiento. Se analizaron los cuadernos de los estudiantes en cuanto a: correspondencia del contenido desarrollado en clase, observaciones o aclaratorias redactadas por el estudiante durante la explicación del profesor, ejercicios realizados por los estudiantes. El análisis y la presentación de los resultados se realizó de forma narrativa, a través de relatos de episodios y descripciones.

- *Para indagar los errores en el aprendizaje de los números irracionales:* se diseñó y aplicó las evaluaciones correspondientes al contenido de números irracionales. Se realizó un análisis de contenido de las evaluaciones realizadas por los alumnos para determinar los errores, se listaron los errores y se categorizaron de acuerdo a la tipología de Radatz.

Hallazgos

Los conflictos cognitivos encontrados en el aprendizaje de los números irracionales se especificaron de acuerdo a la noción que se pretende comprender de la siguiente forma:

Dificultades en el aprendizaje de los números irracionales:

- *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas:* se detectó la confusión semántica por la injerencia del lenguaje cotidiano de homónimas en la enseñanza de los irracionales: la palabra *raíz* los estudiantes la asociaron con árbol, la palabra *índice* la asocian con el dedo que lleva ese nombre y con la tabla de contenido de un trabajo; *radical* la relacionan con la ropa, moda, con una persona atrevida, audaz y decidida; la palabra *coeficiente* la afilian con la medición intelectual y como sinónimo de eficiente; la palabra *racional* en su mayoría la asocian con número, sin embargo, algunos alumnos la consideran sinónimo de equilibrio; el *exponente* lo consideran un expositor o un cantante; y la palabra *irracional* la relacionan con un atributo de la personalidad, con una persona que no entiende, con un animal, con algo incoherente o sin sentido.
- *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:* los estudiantes distinguen con facilidad el argumento lógico de una situación cotidiana; sin embargo, cuando el enunciado involucra nociones matemáticas los estudiantes no comprenden el

argumento lógico de la situación, incluyen información no propuesta y suelen omitir alguno de los datos dados. En cuanto a la abstracción, los estudiantes realizan inferencias más efectivas en dibujo o caricaturas que sobre figuras geométricas. En cuanto a los contenidos previos, se encontró que los estudiantes no reconocen la caracterización de los elementos de los distintos conjuntos numéricos, realizan la descomposición factorial de un número hasta encontrar un número primo no llegan al uno como factor mínimo, consideran que dos términos son semejantes si tiene la misma variable y no le prestan atención al exponente de la variable, al simplificar una expresión algebraica tienden a sumar todos los coeficientes sin prestar atención a la variable.

Los alumnos tienen problemas para sumar dos enteros de distintos signos, dos enteros negativos, un entero y una fracción, aplican la regla de la multiplicación de los signos al sumar; en cuanto a la multiplicación omiten el signo menos en el resultado al multiplicar dos números de distintos signos, emplean el procedimiento de la adición de fracción al multiplicar; para dividir dos fracciones suelen emplear la expresión decimal, es decir, realizan la división de las expresiones decimales equivalentes, emplean parcialmente el procedimiento de la adición de fracción al dividir, colocan el inverso del resultado; en potenciación, cuando el exponente es cero escriben como resultado la base o cero, cuando el exponente es uno escriben el cuadrado de la base sin considerar el signo de la base, suman la base tantas veces como el exponente, cuando la base es negativa y el exponente impar escriben la potencia positiva.

- *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas:* los alumnos manifestaron que la cantidad de números representados sobre la recta numérica para explicar la ubicación de los números irracionales entre dos racionales (fracciones, enteros o naturales) entorpecía la explicación, sugirieron la graficación exclusiva de los irracionales en una recta numérica.
- *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos:* después de la lectura y explicación de cada uno de los ítems del cuestionario los estudiantes reiteradamente solicitaban al docente la explicación de los enunciados, evidenciando déficits del lenguaje y de la comprensión lectora.
- *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas:* los estudiantes consideran que la matemática es importante, útil, difícil, agradable, compuesta

por reglas y operaciones, y aburrida; creen que la asignatura es importante para la universidad, el liceo, la vida cotidiana y el futuro; piensan que son poco exitosos en los exámenes, cuando no prestan atención o no entienden y despejando ecuaciones; de acuerdo a la percepción de los estudiantes los profesores enseñan usando el pizarrón, a través de la practica de ejercicios, de forma lógica, creativa, ordenada y con energía; y entienden cuando los profesores explican bien, con claridad, paciencia, lento, paso a paso, con exactitud cada proceso, cuando prestan atención y aclaran sus dudas.

Obstáculos en el aprendizaje de los números irracionales

De origen epistemológico: los estudiantes identifican a 5 y $\sqrt{5}$ como un mismo número, consideran que todos los de decimales infinitos son irracionales.

- *De origen didáctico:* se empleó la relación pitagórica para explicar la representación de las raíces en la recta, sin embargo no se había enseñado el teorema de Pitágoras porque el tema requiere conocer los radicales. Se emplearon los radicales para explicar la insuficiencia de los racionales en la solución de ecuaciones de la forma $x^2=2$.

Errores en el aprendizaje de los números irracionales

- *Dificultades del lenguaje:* los alumnos identifican al radical como “v”, y la lectura de es $\sqrt{5}$ “ve cinco”; emplean el signo igual para comparar dos elementos distintos.
- *Aprendizaje deficiente de los prerrequisitos:* los alumnos no identifican cuando dos términos son semejantes, tienen dificultades con las operaciones de adición, multiplicación, división y potenciación en los números enteros y racionales, no realizan la descomposición factorial de un número correctamente, no reconocen el producto notable de una suma por su diferencia.
- *Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento:* al solicitarle identificar los elementos de un radical, la cantidad subradical los alumnos la consideran como coeficiente, como exponente de la cantidad subradical, como denominador de la cantidad subradical o como coeficiente; el denominador del coeficiente es considerado como cantidad subradical, como

exponente de la cantidad subradical, los alumnos identifican el denominador del coeficiente del radical como la cantidad subradical, como el índice, como el exponente de la cantidad subradical. Algunas veces los alumnos omiten elementos del radical, como: la cantidad subradical, el coeficiente y el exponente. Los alumnos no son identificados correctamente cuando dos radicales son semejantes, algunos sólo consideran la igualdad del índice de la raíz, otros sólo la igualdad de las cantidades subradicales, tampoco identifican cuando un radical es simple.

- *Aplicaciones de reglas o estrategias irrelevantes:* los alumnos suman radicales sin verificar si son semejantes, tampoco realizan la reducción a radicales simples, ya que emplean los requerimientos de la multiplicación de radicales para su suma. Para multiplicar radicales de diferentes índices determinar el mínimo común múltiplo de los índices y lo emplean como índice común, sin embargo, no alteran la cantidad subradical.

Comentarios finales

Los errores presentados por los estudiantes no se deben percibir como simples descuidos o equivocaciones ingenuas, ya que su aparición es sencillamente la evidencia de los conflictos cognitivos que surgen producto de dificultades y obstáculos, por ejemplo, detrás de los errores por asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento subyacen dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas, en concreto los estudiantes no identifican correctamente los términos de un radical ya que presentan dificultades de confusión semántica por la injerencia del lenguaje cotidiano de palabras homónimas. Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático originan errores por un aprendizaje deficiente de los prerrequisitos, en particular cuando los estudiantes no identifican si dos radicales es porque no comprenden cuando dos términos semejantes.

Para diseñar estrategias pedagógicas dirigidas a fomentar el pensamiento numérico necesitamos realizar previamente una investigación indagatoria de las deficiencias que presentan los estudiantes, y justamente esta investigación surgida dentro de la práctica profesional docente pretende servir de punto de partida para la elaboración de una propuesta didáctica.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2), 165-198.

Gómez C., I. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. (En) Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori pp.124-154

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-177.