LA RESIGNIFICACIÓN DE LA NOCIÓN DE LINEALIDAD

Juan Alberto Acosta Hernández, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
acostah@uaeh.edu.mx, rondero@uaeh.edu.mx, anataras@uaeh.edu.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Medio, Superior

Resumen. *La noción de linealidad toma distintos significados, en los dominios matemáticos por los que transita en el currículo escolar. Además está vinculada desde una perspectiva epistemológica a la noción de proporcionalidad y ambas cumplen una función de articulación en toda la matemática escolar. Las filiaciones y rupturas epistemológicas conllevan a la identificación de diferentes significados de la linealidad en la didáctica misma, como es el caso de la recta representada usualmente como y= mx+b, con* $x \in R$*, que se estudia desde el nivel básico en álgebra elemental y que no cumple cuando* $b \neq 0$*, con la definición de transformación lineal que se analiza en los cursos de Álgebra lineal, por lo que la noción adquiere significados diferentes, de acuerdo al dominio matemático en que se está desarrollando. También, se dan evidencias epistemológicas y cognitivas de algunos de los significados de la noción de linealidad, de modo tal que se muestra cómo es que la misma juega un papel preponderante en la didáctica de las matemáticas.*
Palabras clave: linealidad, significación, articulación

Introducción

En esta investigación se considera que la noción de linealidad, es un elemento fundamental en la construcción de saber matemático. El propósito es mostrar y caracterizar algunos de sus diferentes significados, junto con los de la proporcionalidad, desde una perspectiva epistemológica. Se considera que dichas nociones cumplen la función de articulación entre la matemática elemental y la matemática avanzada, al aportar elementos en general para el aprendizaje de la matemática lo que proporciona su función de nociones metamatemáticas. Pero en la didáctica, la linealidad y la proporcionalidad presentan diferentes significados que les da un estadio distinto en el medio escolar, ya sea como cuerpo teórico ordenador y organizador; o como herramienta útil para estudiar un objeto; o como elemento, que ni es objeto de estudio, ni es herramienta, pero que está presente en el proceso del aprendizaje en la matemática escolar.

Por otra parte, se tienen evidencias históricas y epistemológicas de que los significados de linealidad en distintas épocas, fundamentan su función articuladora como se muestra a través del desarrollo de sus conceptos: función lineal, operador lineal, transformación lineal y espacios vectoriales. Todo lo cual debe repercutir en la didáctica, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada.

Aspectos teórico referenciales

En la didáctica de la matemática, la noción de linealidad toma diferentes formas como objetos matemáticos, como herramientas explícitas, o como organizadores, en la definición del su concepto, no se hacen manifiestas las filiaciones epistemológicas con otros conceptos previos articulados por la misma noción.

Chevallard (1997) hace una clasificación de las nociones, la cual se puede ocupar para caracterizar los significados que presentan la linealidad y la proporcionalidad, en el sentido de que forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar las cuales se dividen en dos grupos: las explícitas que están conformadas por las matemáticas; y las implícitas conformadas por las paramatemáticas y las protomatemáticas. La interpretación que da Martínez (2002) a la conceptualización de las nociones en la didáctica que propone Chevallard (1997) es:

Nociones protomatemáticas, son aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni como instrumento útil para el estudio de otros objetos…

Nociones paramatemáticas son las que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en si mismas; y por lo tanto no son objetos de evaluación directa, sino que son identificadas al momento de presentarse su no-maestría por parte de los estudiantes…

Nociones matemáticas, son objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son por tanto objeto de estudio en si mismas, además de servir como instrumento para el estudio de otros objetos…

Noción metamatemática, son aquellas que desde una perspectiva amplia, brindan elementos de información y conocimiento acerca del funcionamiento en general del aprendizaje de las matemáticas, esto es, dichas nociones funcionan como organizadoras de nociones protomatemáticas, paramatemáticas y matemáticas (Martínez, 2002, p. 51)

Por otra parte, partiendo de la identificación de cuatro escenarios históricos en cuanto a la evolución de la noción de linealidad y sus significados (Acosta, Rondero y Tarasenko, 2008), se toman en consideración las filiaciones y rupturas epistemológicas alrededor de la noción de linealidad, se da cuenta de los significados que tienen fuertes implicaciones en la matemática escolar. En lo que se refiere al primer escenario se identifican las culturas ancestrales egipcia, china y babilonia, donde la proporción directa y la progresión aritmética son el sustento de una actividad sociocultural relevante como lo es el cobro de impuestos. El segundo se ubica en la Grecia clásica, con referencia a Euclides y Arquímedes quienes emplearon la proporción directa para sustentar muchos de sus resultados geométricos. Es en este momento histórico donde aparecen las primeras definiciones de recta. Ubicamos al tercer escenario en la época en que aparecieron los trabajos de Fermat y Descartes quienes a partir de lo realizado por Apolonio siglos antes, definen la ecuación de una recta referida a un sistema de coordenadas cartesianas, donde la proporcionalidad toma la forma analítica $b\ x = a$, y se dan los primeros elementos conceptuales de la noción de linealidad. Finalmente la última de estas referencias históricas se da a partir de mediados del siglo XIX, donde inicia la estructuración del Álgebra Lineal, a través de la incorporación de diferentes saberes matemáticos cuyo elemento de articulación conceptual es precisamente la linealidad.

En este trabajo se ha tomado en consideración el enfoque de las nociones didácticas por parte de Chevallard (1997), en cuanto a la estratificación de la operación del conocimiento matemático en la escuela, y algunas referencias histórico-epistemológica de culturas antiguas donde surge la noción de proporcionalidad para la solución de problemas cotidianos de esas épocas (Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008)

Aspectos metodológicos

Como una forma de organizar la presente investigación, en este caso de dar cuenta de los significados de la noción de linealidad y de su antecedente conceptual, la proporcionalidad directa, se consideraron algunos elementos metodológicos de Arellano (2005), como factor de control de este trabajo. Este esquema de organización parte de lo simple a lo complejo y se compone de: el problema de investigación, estado del arte, definición de conceptos, procesos cualitativos, estrategias de análisis y bibliografía.

Después de definir el problema de investigación, se caracteriza la significación de la noción de linealidad en los escenarios históricos establecidos en su carácter: *protomatemático*, *paramatemático*, *matemático* y *metamatemático.* Además se resalta la importancia de dicha tipificación en lo didáctico, al transitar de la matemática elemental a la matemática avanzada, en lo cognitivo, sociocultural y epistemológico.

Resignificación de la noción de linealidad

La resignificación de la noción de linealidad se plantea desde la perspectiva de un análisis histórico epistemológico (Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008), del papel que dicha noción juega en la didáctica mediante el enfoque de Chevallard (1997) y algunos aspectos de la proporción cualitativa y cuantitativa estudiada por Ruiz y Valdemoros (2006).

Un significado temprano de la noción de proporcionalidad está en la proporción cualitativa (más grande que, menor que), mediante recursos didácticos (figuras, dibujos y expresiones) para facilitar el desarrollo de patrones de percepción, en apoyo a los correspondientes procesos de cuantificación; lo cual antecede la enseñanza temprana de la razón y la proporción (Ruiz y Valdemoros, 2006).

Desde una perspectiva histórica epistemológica, una primera significación, como herramienta, es que en la aritmética babilónica la proporción cuantitativa (igualdad de dos razones), posibilitó hacer cálculos astronómicos y mercantiles, además de áreas y volúmenes. Struik (1986) refiere a un libro clásico de la cultura china *Chiu ch'ang Sua-shu* ubicado en la dinastía Han (206 a.C. – 220 d.C.) donde aparecen porcentajes, proporciones y problemas de aplicación de impuestos; así como usos de *la regla de tres* y de progresiones aritméticas y geométricas, aborda el cálculo de tiempos de transporte y distribución de impuestos por cantidad de población y se ocupa de la *regla de la posición falsa*, inventada por los chinos. En este periodo la noción de linealidad adopta el sentido *paramatemático* por ser un instrumento que describe otros objetos matemáticos, pero no se le considera como objeto de estudio en si mismo.

En la civilización egipcia, se dieron elementos de solución a ecuaciones lineales de la forma $x + ax = b$ o $x + ax + bx = c$, donde *a, b* y *c* son constantes y *x* variable desconocida. En Boyer (1991) se lee que el método de solución, que aparece en el *Papiro de Rhind,* se conoce en la actualidad como el *método de la falsa posición*.

La noción de proporcionalidad aparece en ambas culturas, en el cálculo del cobro de impuestos y en aspectos geométricos para la estimación de áreas y volúmenes. La noción de linealidad surge incipientemente, desde que aparecen las ecuaciones lineales y las progresiones aritméticas, empleadas para resolver problemas cotidianos y contextuales.

En un cierto paralelismo, en la didáctica actual la noción de proporcionalidad presenta diversos papeles en la matemática escolar, de acuerdo a los significados didácticos que están en juego. La proporcionalidad cuantitativa como igualdad de dos razones, es una noción matemática en educación elemental ya que es un objeto matemático de estudio en ese momento. Sin embargo toma el rol de *paramatemática* cuando se abordan temas de cálculo de impuestos o al abordar el tema de la recta en el currículum escolar, no siendo objetos de evaluación directa.

Volviendo a lo histórico epistemológico, en la Grecia clásica Euclides afirma que por dos puntos pasa una recta y que ésta es única, además la proporcionalidad directa se emplea en el cálculo aproximado del área de un círculo a través del cuadrado de su diámetro. Por otra parte, tomando ideas de Anaxágoras en referencia a las razones y proporciones, Eudoxio (408? – 355?), define indirectamente la igualdad de dos razones *a:b* y *c:d* (Hofmann, (2002) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008). En el primer postulado del primer libro *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes da la definición más empleada de la recta hasta nuestros días: *La recta es la línea más corta que une sus puntos extremos.* Por otra parte, Arquímedes aplica la proporcionalidad directa entre variables de la misma dimensión, aunque Euclides había probado que la relación entre los volúmenes de dos esferas depende del cubo de sus diámetros (Torija, (1999) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008). En esta segunda época se entrevé que la noción de proporcionalidad adopta el carácter de objeto matemático de estudio, en virtud del estilo propio de formalidad de la escuela griega.

Desde el análisis de la evolución de las nociones referidas, en este segundo escenario la noción de linealidad, empieza a tener una ruptura epistemológica con la noción de proporcionalidad, ya que la connotación abstracta se expresa a través de los postulados y demostraciones de teoremas geométricos. Ellos ponen en juego distintos significados de la misma, como *noción matemática* al definir Eudoxio a la igualdad de dos razones y paramatemática al servirle a Arquímedes al decir que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de sus diámetros.

Descartes (1596 – 1650) construye el primer sistema matemático moderno, abandonando la filosofía natural tradicional, incorporando a las matemáticas todo lo que admite ordenación y medida, sabe que todos los problemas geométricos de carácter lineal y cuadrático pueden resolverse con regla y compás. Fermat y Descartes, dieron plena significación a los trabajos de Apolonio sobre lugares geométricos, en particular a la situación de un punto en un plano por su posición respecto al eje de las x, proponiendo a la recta que pasa por el origen, de la forma $b\,x = a\,y$, y plantearon $a\,x + b\,y = c$ como la ecuación de la recta en su forma general (Hofmann, (2002) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008).

A diferencia de los dos primeros escenarios, en este periodo se logra la conceptualización unificada de la recta, al asociar un conjunto de parejas de números reales $(x,\ y)$ a un lugar geométrico (en términos modernos, $f(x,y)=0$) representado en un sistema de ejes cartesianos. La linealidad adopta representaciones analítico-geométricas, que permiten expresar lo geométrico por medios algebraicos, lo que posibilita ganar en lo conceptual, al transitar entre lo analítico y lo geométrico (Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008).

En la didáctica actual la proporcionalidad debiera ser considerada de manera explícita como una noción paramatemática al estudiar los primeros temas de precálculo o geometría analítica, dándole significación a la articulación entre la igualdad de dos razones $a{:}\ b$ y $c{:}\ d$ y la ecuación de la recta $a\,x + b\,y = c$, de acuerdo a los significados didácticos que estén en juego. Además de que dicha resignificación tendría mayores alcances en temáticas fuera de la matemática, como por ejemplo en la química en los cálculos estequiométricos (cálculo de magnitudes mediante proporciones).

Una cuarta época, ubicada a partir del siglo XVIII, es donde inicia de manera incipiente el Álgebra Lineal, tomando en consideración algunas ideas de Euler y de Cramer, entre otros. Se va creando una teoría de sistemas de ecuaciones lineales, tratándose el caso de n ecuaciones con m incógnitas, el estudio de los determinantes y el rango de un sistema. Posteriormente se incorporan conceptos como matrices, dependencia e independencia lineal, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Todo lo cual lleva a una estructuración temática y conceptual del Álgebra Lineal, donde el eje epistemológico sobre el que descansa es precisamente la noción de linealidad. Uno de los primeros significados, aparece en el libro de Euler, publicado en 1750, *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Lignes Courbes*. Este estudio lo llevó al hecho de que cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene solución única, lo cual era una creencia generalizada en ese momento. En términos actuales significa que las ecuaciones son linealmente independientes. El enfoque de Euler va hacia el ajuste de ecuaciones, en tanto el concepto de dependencia lineal es más general, válido para una gran cantidad de objetos. A la inclusión de una ecuación en otra Euler, le llama *dependencia inclusiva*, la cual dominó la concepción en problemas con ecuaciones lineales durante el siglo XIX (Dorier (2000) citado en Acosta, Rondero, Tarasenko, 2008).

Por otro lado, cuando en la matemática escolar se estudia el tema de dependencia lineal no es común que sea abordado, partiendo de la proporcionalidad cuantitativa. En la escuela se dice: "Dos vectores v_1 y v_2 definidos en R^n, con $n > 1$, se dice que son linealmente dependientes sí y sólo si la combinación lineal $c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 = 0$, se cumple cuando $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$. Un aspecto didáctico rescatable es el que refiere a cómo se relacionan conceptualmente la dependencia lineal y la proporcionalidad directa. Se puede ver de la definición anterior, que se cumplen las proporcionalidades directas, $\overrightarrow{v_1} = -(\frac{c_2}{c_1})\overrightarrow{v_2}$, siempre y cuando $c_1 \neq 0$, o bien $\overrightarrow{v_2} = -(\frac{c_1}{c_2})\overrightarrow{v_1}$, si $c_2 \neq 0$ (Rondero, et. al., 2009). Está significación permite una mejor articulación de dichos saberes en un primer curso de Álgebra lineal.

Se tienen evidencias históricas-epistemológicas y didácticas de que el vínculo entre los diferentes significados de la noción de linealidad, cumplen una función articuladora como se muestra a través de la evolución de sus conceptos: función lineal, operador lineal, transformación lineal y espacios vectoriales, entre otros. Todo lo cual debe repercutir en la didáctica, desde la matemática elemental hasta la matemática avanzada. En particular en este trabajo se han reportado ciertos significados de la noción de linealidad, desde una perspectiva epistemológica y didáctica.

Conclusiones

Se infiere que los significados que presenta la noción de linealidad y su antecedente conceptual, la noción de proporcionalidad se dejan de lado en la didáctica propiciando incongruencias conceptuales.

La noción de linealidad es un elemento de articulación en la matemática escolar y se puede apreciar su característica de transversalidad conceptual entre la matemática elemental y la avanzada, en el entendido de que la noción adopta diferentes estadios que tienen su expresión en los conceptos que genera y que a su vez aportan nuevos significados a la misma.

Una de las rupturas epistemológicas importantes que tiene repercusión en la didáctica, es por la desarticulación manifiesta entre la igualdad de dos razones $a:b$ y $c:d$ con la recta que pasa por el origen, $b\,x = a\,y$, y con la función lineal $f(x)= ax +b$. Se cree que esto sucede porque la noción de linealidad presenta diferentes significados que no se explicitan en el medio escolar, ya sea como, concepto ordenador y organizador, -*metamatemático*-, o herramienta útil para estudiar un objeto, -*paramatemático*-, u objeto de estudio, -*matemático*-, pero que está presente en el proceso del aprendizaje en la escuela.

En este trabajo se dan evidencias, sobre todo histórico-epistemológicas y didácticas, de los significados en relación a la noción de linealidad y que se ven reflejadas en el aprendizaje de ciertas áreas de la matemática como son el Precálculo, Geometría Analítica y Álgebra lineal.

Es posible identificar el fenómeno didáctico de las incongruencias conceptuales en relación a otras nociones matemáticas, lo cual puede incidir en su aprendizaje por no resaltar sus significados, ni la función que cumplen en el proceso.

Se continúa la búsqueda de precisar algunos indicios para un discurso didáctico congruente y articulado en la matemática escolar. Para tal propósito el rescate de los significados de la noción de linealidad, posibilita aportar elementos para la Didáctica de la Matemática que pueden contribuir al Currículum Escolar. Incluso el poder repercutir en el nivel medio superior en cursos como el de Geometría Analítica, e incluso hasta en una primera aproximación al Álgebra Lineal en el nivel superior.

Referencias bibliográficas

Acosta, J., Rondero, C., Tarasenko, A. (2008) Un enfoque histórico y epistemológico de la noción de linealidad. Memoria HPM (pp. 301-308). México: CINVESTAV-IPN.

Arellano, J. (2005). Los esquemas metodológicos para la investigación social. México: S y G editores.

Boyer, C. (1991). A History of Mathematics. United States: Wiley.

Chevallard, Y. (1997) La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Editorial Aique.

Martínez, G. (2002) Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 5 (1), 45-78.

Rondero, C., Tarasenko, A., Acosta, J., (2009) Algunas incongruencias conceptuales sobre la noción de linealidad. ALME 22 (pp. 535-543). México: CLAME.

Ruiz, E. y Valdemoros, M (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 9 (2), 299-324.

Struik, D (1986) Historia concisa de las matemáticas. Serie Maestros del Pensamiento Científico. México: Instituto Politécnico Nacional.