

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN CON DERIVE: DE LA SOLUCIÓN ALGEBRAICA A LA SOLUCIÓN GRÁFICA

Javier Barrera Ángeles¹, Petra Téllez Reyes², Iván León Giniebra³, Tulio Rafael Amaya de armas⁴

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Centro de Bachillerato Tecnológico e México, Cuba, Colombia.

Industrial y de Servicios No 8, Hidalgo, Universidad “Hermanos Saiz Montes de

Oca” Pinar del Río, Madre Amalia, Universidad de Sucre de Sincelejo.

Jbarrera12@hotmail.com, ptr405@hotmail.com, ileong@mat.upr.edu.cu, tuamal@hotmail.com

Resumen: Este trabajo presenta los resultados de una investigación cuyo objetivo es documentar de qué manera el uso de tecnología facilita la comprensión de soluciones de tipo gráfico de una ecuación diferencial ordinaria. En este sentido, el uso de herramientas tecnológicas es promovido por profesionales de la educación e instituciones como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Un aspecto importante del uso de tecnología, es la representación dinámica. Por otra parte, proporciona marcos constructivos de referencia en donde se representan y articulan dinámicamente diferentes registros de representación. Esta investigación se sustentó en un caso de estudio con estudiantes universitarios. El método empleado fue de comparación y, algunos resultados sobresalientes evidencian una clara disociación entre las respuestas analíticas o simbólicas y la interpretación gráfica de los resultados.

Palabras clave: Representación, resolución, gráfica, analítico, cualitativo.

Abstract: This work represents the results of the research aimed at documenting how the use of technology facilitates the comprehension of the graphical solution of an ordinary differential equation. In this sense, the use of technological tools is promoted by professionals in educations and Institutions such as the NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). An important point of the use of technology is the dynamic representation. In the other hand, it provides constructive frames of reference that represent and articulate dynamically different registers of representation. This research was sustained in a study case with college students. The method used was the comparison, and some outstanding results demonstrate a clear dissociation between the analytic or symbolic answers and the graphic interpretation of the outcomes.

Key words: Representation, resolution, graphical, analytical, qualitative.

Introducción

El propósito de este trabajo es presentar los resultados de la investigación “Resolución de Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con derive: de la solución algebraica a la solución gráfica”. El objetivo es documentar de qué manera el uso de la tecnología facilita la comprensión de las soluciones de tipo gráfico de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Un aspecto importante que conduce a esta investigación tiene que ver con la necesidad de complementar la práctica docente ordinaria con una interacción ordenada del uso de las herramientas tecnológicas (manejo del software) para una comprensión significativa de la solución de una ecuación diferencial. Al respecto, existe la idea en algunos profesores e investigadores que el uso de la tecnología promueve un mejor ambiente de aprendizaje. En este sentido, el uso de la tecnología es promovido por instituciones de educación superior en

varios países, así, como por profesionales de la educación e instituciones de carácter gubernamental y no gubernamental como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos y niveles educativos (Godino, Recio, Roa, Ruiz y Pareja, 2005).

El uso de la tecnología tiene que ver con la representación dinámica que muestra la pantalla, sobre la cual se pueden hacer visualizaciones concretas acerca de la exploración de posibles resultados y que con el sólo uso de lápiz y papel esto era casi imposible de realizar. Así, la tecnología es una estructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). En este sentido, el propósito de las herramientas tecnológicas es desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos matemáticos en los procesos de resolución de problemas (Moreno, 2005).

Por otra parte, existen investigaciones que han abordado el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden, por ejemplo, autores como Sandoval y Díaz (2009), han señalado que el Cabri-Géometre proporciona un nuevo marco constructivo de referencia muy amplio y adecuado a las ecuaciones diferenciales de primer orden, debido a que en él pueden representarse y articularse dinámicamente diferentes registros de representación.

Para llevar a cabo esta investigación se hizo una selección adecuada de situaciones que permitieron estudiar a las ecuaciones diferenciales de primer orden con lápiz y papel (resolución simbólica) y con el uso del derive. Para lo cual se diseñó una investigación sustentada en un estudio de caso en donde participaron estudiantes del segundo año universitario. El método empleado en esta investigación fue de comparación.

Algunos de los resultados más sobresalientes son: en la primera actividad el problema que enfrenta el estudiante es distinguir el tipo de ecuación de acuerdo a sus características. Otro problema que presentaron fue la dificultad para encontrar la ecuación diferencial a través del enfoque analítico. Por último, no existe reflexión sobre los procesos de resolución en las situaciones planteadas. En la segunda actividad, a pesar de la interacción con la herramienta tecnológica, existen dificultades en la introducción y manipulación de la información con dicha herramienta, ya que se presentan resultados diferentes en la solución de la misma ecuación diferencial. Los resultados evidencian una clara disociación entre las respuestas analíticas o simbólicas y la interpretación gráfica de las situaciones planteadas. Por último, el uso del derive creó un ambiente interactivo que motivo a los estudiantes a resolver los problemas planteados, aunque los resultados no fueron los esperados.

Referentes teóricos

Un aspecto importante que conduce a esta investigación tiene que ver con la necesidad de complementar la práctica docente ordinaria con una interacción ordenada del uso de herramientas tecnológicas (manejo del software) para una comprensión significativa de la solución de una ecuación diferencial ordinaria a través del análisis reflexivo; al respecto, se tiene la idea en algunos profesores e investigadores de que el uso de la tecnología promueve un mejor ambiente de aprendizaje en los estudiantes. En este sentido, el uso de la tecnología es promovido por instituciones de educación superior en varios países, así, como por profesionales de la educación e instituciones de carácter gubernamental y no gubernamental como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que promueven el desarrollo y difusión de recursos tecnológicos para los distintos contenidos y niveles educativos (Godino, et al. 2005).

Un aspecto importante en el uso de la tecnología tiene que ver con la representación dinámica que muestra la pantalla, sobre la cual se pueden hacer visualizaciones concretas acerca de la exploración de posibles resultados y que con el sólo uso de lápiz y papel esto era casi imposible de realizar. Así, la tecnología es una estructura representacional que amplía las posibilidades del pensamiento humano (Kaput, 1994). De manera que el propósito de las herramientas tecnológicas es desarrollar habilidades y destrezas en los estudiantes al manipular objetos en los procesos matemáticos (Moreno, 2005).

Por otra parte existen investigaciones que han abordado el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, por ejemplo, autores como Sandoval y Díaz (2009), han señalado que el Cabri-Géometre proporciona un nuevo marco constructivo de referencia muy amplio y adecuado a las ecuaciones diferenciales de primer orden, debido a que en él pueden representarse y articularse dinámicamente diferentes registros de representación. También existen trabajos de investigación que estudian la forma en que las herramientas tecnológicas promuevan la revisión, integración y aplicación de conocimiento a través de la aplicación de estrategias y técnicas que pretenden desarrollar habilidades en los estudiantes mediante del uso de herramientas informáticas y técnicas numéricas en la resolución de problemas.

Desde la experiencia misma, sabemos que los métodos analíticos están limitados a resolver ciertos problemas específicos. Sin embargo, los métodos numéricos no tienen limitaciones a solo formas estándares. Además, muchas de las ecuaciones diferenciales de significancia práctica no se pueden resolver usando métodos analíticos de cálculo, por lo que se necesitan aproximaciones numéricas (Ascheri y Pizarro, 2010).

Planteamiento y análisis de resultados

El curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, no sólo es un curso más de matemáticas, es un tema que requiere de un amplio conjunto de conocimientos para su buen desarrollo y entendimiento. Además, requiere de habilidades y destrezas en el manejo de conceptos y conocimientos por parte de los estudiantes para alcanzar el éxito en su entendimiento y comprensión de los fenómenos físicos; es decir, el estudio de estas ecuaciones específicas, no aparecen solo a partir de las familias de curvas geométricas, sino también del intento de modelar diversos fenómenos de la física o la ingeniería e inclusive se ha considerado como la piedra angular de disciplinas como la física y la ingeniería eléctrica. También proporciona un importante instrumento de trabajo en áreas tan diversas como la biología y la economía (Zill, 1988). Por ejemplo, la tasa de crecimiento de la población P es la derivada dP/dt . Puesto que ésta es proporcional a la población, se expresa como el producto, kP , de la población P y la constante k de proporcionalidad (Blanchard, Devaney & Hall Glen (1999).

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Resolver esta ecuación requiere del dominio de un conjunto de conocimientos y habilidades por parte de los estudiantes. Es decir, primero se debe hallar una solución general a través de algún método algebraico o analítico, para después encontrar cualquier solución particular. En este caso, la solución es $P(t) = ce^{kt}$, proporcionando valores a c se obtiene una familia de graficas que muestran las diferentes soluciones de la Ec. Diferencial.

Otro aspecto importante en el estudio y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales tiene que ver con los enfoques de solución, en primer lugar tenemos el enfoque analítico, que busca fórmulas explícitas que describen el comportamiento de las soluciones. Por ejemplo, las funciones exponenciales dan soluciones explícitas al modelo del crecimiento exponencial. En segundo lugar está el enfoque cualitativo que hace uso a la geometría para tener un panorama del comportamiento del modelo y por último, el enfoque numérico que usa las herramientas tecnológicas para buscar resultados aproximados a la solución.

Para el desarrollo de esta investigación se ha considerado solamente el enfoque analítico y el enfoque cualitativo, para la cual se diseñaron dos actividades:

Actividad 1. Plantea tres situaciones:

- a) Se plantea la tabla que contiene cinco ecuaciones diferenciales con los siguientes encabezados y se pide que marquen el tipo de Ecuación que corresponda.

Ecuación	Separable	Homogénea	exacta	lineal
----------	-----------	-----------	--------	--------

b) Se pide hallar la ecuación diferencial que corresponde a la familia de curvas:

$b_1) y = cx^3$, $b_2) y^2 = c(x+1)$. Además, bosquejar gráficamente las soluciones.

c) Se pide al estudiante que resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$c_1) \left(1 - \frac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right)dy = 0, c_2) \frac{dy}{dx} + y = e^{3x}, c_3) \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 y^2}{1+x}, c_4) (y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$$

La situación “a)”, busca que el estudiante identifique las características que distinguen a cada tipo de ecuación; la Situación “b)”, plantea la necesidad de utilizar el enfoque analítico y cualitativo para encontrar la ecuación diferencial que describe la familia de curvas, además de ilustrar gráficamente cada familia; por último, la situación “c)”, establece que el estudiante resuelva las ecuaciones diferenciales mediante el enfoque analítico.

Actividad 2. Promueve el uso de la herramienta tecnológica a través del software (derive) para analizar los resultados de las ecuaciones diferenciales mediante el enfoque cualitativo en las situaciones b y c.

Estas actividades pretenden aportar elementos y recursos que el estudiante utiliza para resolver los problemas planteados. Además, promueve el uso de herramientas tecnológicas para analizar y reflexionar sobre dichos resultados utilizando como marco de referencia el enfoque cualitativo a través del uso de elementos tales como: *extensivos* (las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto), *ostensivos* (las herramientas semióticas disponibles para representar o para operar con los problemas y objetos involucrados), *actuatorios* (procedimientos y estrategias para resolver problemas), *intensivos* (propiedades características y relaciones con otras entidades) y *validativos* (argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones). En este sentido, se usa la herramienta tecnológica para dar respuesta a los problemas, lo que permite un mayor dinamismo en el manejo de los objetos matemáticos, dando lugar a razonamientos heurísticos según Lavallo, Micheli y Boché (2003).

Metodología

El diseño de esta investigación tuvo como sustento un caso de estudio a partir de una muestra de 27 estudiantes de segundo año universitario (tercer semestre de Lic. En sistemas computacionales, de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, entre 19 y 21 años). El tipo de método que se empleó fue de comparación a partir de un primer momento y una segunda aplicación en un segundo momento. A estos estudiantes se les dio un curso de

ecuaciones diferenciales ordinarias; tomando como referente la literatura recomendada por los programas de estudio; este curso tuvo una duración de 4 meses, tomando 5 horas a la semana de clase. Durante este período se instruyó a los estudiantes sobre el uso del software para analizar de manera cualitativa los resultados encontrados al resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias. Posteriormente se diseñó la estrategia para el desarrollo de esta investigación considerando aspectos como el día, la hora, el equipo a utilizar, el escenario, etc. Después del cuarto mes se aplicaron las actividades previamente diseñadas de acuerdo al objetivo de esta investigación. Una vez que resolvieron de manera analítica los problemas se les pidió que analizaran los resultados de manera cualitativa con el uso de las herramientas tecnológicas. Una de las recomendaciones era que explicaran en la medida de lo posible el proceso que realizaban en cada problema.

Análisis de resultados

Después de haber realizado el trabajo y recabado la información escrita así como las presentaciones realizadas en la computadora, se procedió al análisis de la información, la cual se describe a continuación. De la actividad uno, los resultados en la situación “a”, fueron los siguientes: separables (23), Homogéneas (3), Exactas (3), Lineales (23). Como se aprecia en este resultado el primer problema que enfrenta el estudiante es distinguir el tipo de ecuación de acuerdo a sus características, la simple inspección no les fue suficiente para determinar el tipo de ecuación. Sin embargo, las ecuaciones separables y lineales son las más favorecidas según muestran los resultados. Para la situación “b”, los resultados son poco alentadores, es decir de 27 estudiantes, 12 trazaron las dos gráficas solicitadas, 7 solo la primera gráfica y 8 ninguna. De las gráficas mostradas por los estudiantes se desprende que el recurso para el trazo de gráficas fue en menor grado el registro numérico (tabulación). En total solo nueve estudiantes trazaron de manera correcta la gráfica uno y solo un estudiante trazo las dos gráficas de manera adecuada.

Para el análisis en los procesos de solución de las ecuaciones diferenciales planteadas en la situación “c”, se consideraron los siguientes elementos: extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos. Al analizar las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados se observa que no existe reflexión alguna en cuanto al proceso de resolución, lo que produce resultados incorrectos en la mayoría de los casos. En este sentido, la tabla I resume los resultados sobre los procedimientos requeridos para hallar la solución.

Ecuación	Procedimiento correcto	Procedimiento incorrecto	Sin procedimiento	Total
Ec. I	14	13		27

Ec.2	14	12	1	27
Ec.3	10	16	1	27
Ec.4	6	19	2	27

Tabla 1. Resultados obtenidos en la situación "c"

Como se puede observar, el 40.74% corresponde a las respuestas correctas a través de elementos tales como actuativos, intensivos, validativos. El 55.55% corresponde a los procedimientos incorrectos y el 3.70% simplemente no contesto nada. Estos resultados muestran que el uso del enfoque analítico a través de los elementos explicativos se ve limitado por las carencias tanto conceptuales como operativas de los estudiantes, cuya actividad la realizaron sin detenerse en la reflexión, el análisis de los procedimientos e interpretación de resultados.

La segunda actividad enmarcada dentro del enfoque cualitativo, busca un acercamiento a la reflexión sobre los resultados emanados de los procesos en la resolución de problemas. El uso de las herramientas para lograr este fin juega un papel importante en esta actividad. Si bien es cierto que el uso de las herramientas tecnológicas permite el desarrollo de habilidades en los estudiantes, también es cierto que plantea al estudiante una serie de retos que ponen a prueba su capacidad en el manejo de una herramienta que requiere de un conjunto de conocimientos para el desarrollo de un trabajo reflexivo en la resolución de las ecuaciones diferenciales. Conocimientos tales como: instrucciones para operar el equipo, instrucciones sobre el manejo del software, conocimientos de la disciplina y habilidades en la interpretación de resultados.

Una revisión detallada de las respuestas planteadas en la situación tres, facilita visualizar diferentes respuestas a una misma pregunta a pesar de que el uso de la herramienta tecnológica permite interactuar de manera dinámica con los resultados. También hay evidencia en las respuestas de los estudiantes sobre el hecho de que no se reflexiona sobre estas, ya que al estudiante solo le interesa introducir la ecuación y que aparezca el gráfico, sin importar aspectos como las escalas o dominios de la función solución. En ningún caso de los registrados en esta investigación se percibe explicación alguna sobre las respuestas en las cuales hagan uso de los elementos actuativos, intensivos y validativos, a pesar de que el ambiente les permite interactuar de manera dinámica y reflexiva.

Conclusiones

Al finalizar esta investigación se obtuvieron algunos resultados sobresalientes. El primer problema que el estudiante enfrenta es distinguir el tipo de ecuación de acuerdo con sus características. Además, el recurso para el trazo de graficas sigue siendo el registro numérico

(tabulación). No existe reflexión en cuanto al proceso de resolución de problemas dentro del enfoque analítico, por consiguiente, la actividad se ve limitada por las carencias conceptuales y operativas de los estudiantes, cuya actividad la realizan sin reflexionar en los procedimientos de solución e interpretación de resultados. Por otra parte, existen serias dificultades al momento de introducir y manipular la información con la herramienta tecnológica, ya que al presentar las gráficas que corresponden a las soluciones de las ecuaciones diferenciales planteadas aparecen gráficas diferentes. A pesar de que el uso de la herramienta tecnológica permite interactuar de manera dinámica con los resultados no se percibe explicación sobre las respuestas a las situaciones planteadas. En esta segunda parte se muestran una clara disociación entre las respuestas analíticas o simbólicas y la interpretación gráfica de los resultados. Por último, el uso del *derive* creo un ambiente interactivo que motivo a los estudiantes a resolver los problemas planteados, aunque los resultados no fueron los esperados. Sin embargo, si se muestra un avance significativo en el intento de reflexionar sobre las gráficas como respuestas a los problemas planteados.

Referencias bibliográficas

- Ascheri, M.E y Pizarro, R.A (2010). *Propuesta para la enseñanza de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando OCTAVE*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de la Pampa, Santa Rosa, Argentina. Recuperado el 28 de Octubre de 2011 de <http://www.uncoma.edu.ar/academica/seadi/documentos/03.pdf>
- Blanchard, P., Devaney, R. L. & Hall, G.R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: International Thomson Editores.
- Godino, Juan D., Recio, Ángel M., Roa, R., Ruiz, Francisco y Pareja, Juan Luis (2005). *Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas*. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (pp. 235-242). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Kaput, J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots. Mathematics and cognitive science*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Lavalle, A., Micheli, E., y Boché, S. (2003). Juicios heurísticos sobre probabilidad en alumnos del profesorado en matemática. *Sociedad Argentina de Educación Matemática* 5 (17), 23 – 32
- Moreno, M (2005). *El papel de la didáctica de la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros*. España: Departamento de Matemáticas (UdL).

Sandoval, I. y Díaz, E. (2009). *Ecuaciones diferenciales de 1er orden una perspectiva didáctica con geometría dinámica*, Departamento de Matemática Educativa del IPN. México.

Zill, G. D (1988). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.