EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Jesús Ávila Godoy, Francisco Javier Parra Bermúdez, Ramiro Ávila Godoy
Universidad Autónoma de Baja California México
Universidad de Sonora
jag_virgo@hotmail.com, fjparra@correo.física.uson.mx, ravilag@gauss.mat.uson.mx

Resumen. En este trabajo se presentan algunas reflexiones hechas en un seminario sobre Epistemología y Didáctica de las Matemáticas organizado para analizar el origen y desarrollo de los objetos matemáticos. Este análisis se realizó asumiendo las premisas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática de Juan D. Godino y colaboradores (EOS) y estuvo orientado a tratar de mejorar la comprensión de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, considerando que dicha comprensión resulta fundamental para mejorar ambos procesos. Se pretende ilustrar, con algunos ejemplos, el papel de las situaciones problémicas en el origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos y cómo dichos significados, en un cierto momento, se convierten en obstáculos que dificultan el enriquecimiento de tales significados; lo cual, se asume, sucede tanto en el desarrollo histórico de las ideas como en el proceso de aprendizaje que viven los estudiantes en el aula.

Palabras clave: epistemología, didáctica, obstáculo epistemológico, objeto matemático, significado

Abstract. In this paper, we present some reflections originated during a seminar on Epistemology and Mathematics Education, which was developed with the purpose to analyze the origin and development of mathematical objects. The analysis was performed based on the premises about Cognition and Teaching in Mathematics presented by Juan D. Godino et al, in the Onto-semiotic Approach (Enfoque Ontosemiótico or EOS for its initials in Spanish) and aimed at improving the understanding of learning and teaching processes in mathematics, because a better understanding is essential to improve both processes. We use several examples to illustrate the role of problem situations in the origin and development of meanings about mathematical objects and how those mental conceptions developed about the meanings, at one point in time, could become obstacles to enrich those same meanings. We say that those difficulties occur, both, in the historical development of ideas and in the learning process experienced by students in the classroom.

Key words: epistemology, didactic, epistemological obstacle, mathematical object, meaning

Introducción

La investigación educativa que se realiza en los distintos ámbitos, tiene como propósito último y más general, aportar elementos que permitan comprender e interpretar de mejor manera los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan en el aula escolar, como el espacio donde se da la interacción entre profesor y alumnos, considerando que una mejor comprensión e interpretación de dichos procesos, permitirá diseñar estrategias de enseñanza que mejoren significativamente la calidad de los aprendizajes de los alumnos.

Lo anterior equivale a decir, en el caso de la investigación en Matemática Educativa, que lo que se pretende es aportar elementos que puedan ser utilizados para lograr que los alumnos adquieran un conocimiento más sólido de la matemática y, que éste, se vea reflejado en un uso más eficaz de los conceptos y métodos de la disciplina, en el análisis, interpretación y resolución de problemas.

Abordar la investigación, con el propósito de comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática que se desarrollan en el aula escolar, requiere del investigador, asumir una serie de premisas en el ámbito de la ontología y la epistemología de los objetos matemáticos (concepción filosófica); de cómo influyen en el proceso educativo escolar los factores socioculturales del entorno (concepción sociológica); de cómo se desarrolla el proceso mental de construcción de conocimiento en el individuo (concepción psicológica); de cómo influye el trabajo docente, a través del diseño e implementación de determinadas estrategias de enseñanza, en la asignación de significados a los objetos matemáticos por los alumnos (concepción didáctica); además de una comprensión razonable de los conceptos y métodos de la disciplina.

Las reflexiones que aquí se presentan, parten de las siguientes premisas relacionadas con la epistemología y la ontología de los objetos matemáticos:

- Que la matemática, desde sus orígenes ha sido una herramienta intelectual construida socialmente por el hombre, con el propósito de resolver determinado tipo de problemas.
- Que tal herramienta la fue construyendo en el proceso mismo de resolución de dichos problemas, para lo cual creaba y utilizaba sus propios sistemas de prácticas. En este sentido, la matemática ha sido siempre una actividad de resolución de problemas.
- Que los diversos sistemas de prácticas implementados en un determinado momento de su desarrollo histórico, constituyen los significados de los objetos matemáticos emergentes,
- Que los significados construidos se convierten, en cierto momento, en obstáculos (epistemológicos) que dificultan la asimilación al significado de un determinado objeto matemático de nuevos sistemas de prácticas creados para resolver nuevos problemas.

Algunas consideraciones sobre la epistemología de la matemática

La matemática presentada en muchos textos como un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurados que, partiendo de un conjunto mínimo de verdades evidentes (axiomas), deduce y establece, a través de un razonamiento basado en los principios de la lógica, la veracidad de un conjunto de proposiciones (teoremas), parece corresponderse con una visión platónica de la misma, esto es, una visión que considera a la matemática, como un ente con existencia fuera e independiente de la actividad humana.

Dicha visión desconoce que el estado actual de la matemática es fruto de un largo proceso a través del cual, el hombre, en su intento por alcanzar la verdad acerca del diseño y funcionamiento del universo y, por resolver los problemas y desafíos que éste le presenta, ha construido los objetos (conceptos y métodos) de la matemática, mismos que han evolucionado en la medida en que el hombre ha ido modificando, diversificando y enriqueciendo los significados de dichos objetos, como consecuencia de la creación de nuevos sistemas de prácticas ideados para abordar y resolver problemas de la más diversa índole.

Fue en la etapa de esplendor de la antigua cultura griega, la primera ocasión que la matemática es presentada como un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurado. Euclides, en *Los Elementos*, presenta la Geometría como una abstracción, como un modelo del espacio físico (concebido como un espacio estático).

Si bien, la Geometría Euclidiana prevaleció hasta comienzos del siglo XX, como modelo matemático del espacio físico (estático), en el siglo XVII, Galileo y Kepler inician el estudio de los movimientos, el de caída libre (Galileo) y el de las órbitas de los planetas alrededor del sol (Kepler). Bajo la premisa de Galileo de que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, intentan describir y explicar dichos movimientos, para lo cual idearon y utilizaron nuevos y diversos sistemas de prácticas que originaron nuevos significados de ciertos objetos matemáticos, dando lugar a la creación de un modelo matemático del movimiento mecánico en el espacio concebido a la manera de Euclides.

En esta misma dirección, de tratar de establecer un modelo matemático de las leyes que rigen el funcionamiento de la naturaleza; durante la segunda mitad del siglo XVII, a partir de nuevos datos, nuevas observaciones, nuevos experimentos y desde luego, a partir del propio desarrollo alcanzado por la matemática, Newton, profundizando en el análisis del movimiento y de las causas que lo originan, diseñó e implementó un sistema de prácticas del que emergieron nuevos objetos matemáticos, cuyos significados provocaron un salto cualitativo en el desarrollo de la matemática, dando origen así, al Cálculo Diferencial e Integral como una herramienta muy poderosa para describir y explicar los fenómenos cuyo rasgo distintivo era la variación.

A la par que Newton y durante el mismo periodo, Leibniz, queriendo resolver el problema de trazar la tangente a una curva en un punto determinado, diseñó e implementó también un sistema de prácticas del que emergieron nuevos objetos matemáticos cuyos significados eran esencialmente los mismos que los construidos por Newton al para resolver los problemas del movimiento. De ahí que a ambos se les otorgue el mérito de la creación del Cálculo Diferencial e Integral.

La concepción de la matemática como modelo de la realidad física, prevaleció desde la época de la Grecia Antigua hasta comienzos del siglo XX, concepción que se reafirmó de manera especial, durante el siglo XVII, como resultado de haberse formulado, utilizando el lenguaje de la Matemática, las leyes y teorías científicas que permitían, describir, explicar y predecir el funcionamiento de la naturaleza, con resultados que eran confirmados por las observaciones y los experimentos. Con base en estos hechos, se puede afirmar que durante este periodo, el desarrollo de la matemática se dio en estrecha colaboración con el desarrollo de las ciencias, particularmente de la Física.

Pero por otro lado, el desarrollo de la matemática muestra que ésta no sólo le fue útil a las ciencias naturales, en su intento por describir y explicar el universo, sino también muestra, que dichas ciencias proporcionaron a la matemática los problemas que motivaron el origen y desarrollo de diversos sistemas de prácticas, cuya implementación, que en principio pretendía dar respuesta a los problemas concretos planteados, motivó el surgimiento y desarrollo de los objetos matemáticos y propició la diversidad y riqueza de los significados de dichos objetos.

La potencia y eficacia mostrada por la matemática y sus métodos en la explicación y predicción de los fenómenos naturales, llevaron a que se considerara a ésta como la verdad, en lo que al diseño de la naturaleza se refiere y, como la máxima expresión de la exactitud en el razonamiento así como un cuerpo de verdades irrefutables, cuyo más sólido criterio de verdad era el propio comportamiento de la naturaleza que parecía estar en completa armonía con los principios y leyes de las matemáticas. Incluso, se concebía a la matemática, y algunos la siguen concibiendo, como un cuerpo de conocimientos cuya existencia era independiente de la mente humana y que el hombre debe descubrir y apropiarse de ella a través de su aprehensión (concepción platónica).

Sin embargo, y como ha ocurrido con todo conocimiento, y la matemática no es la excepción, su propio desarrollo puso de manifiesto que las verdades evidentes por sí mismas y las derivadas de éstas, no eran tales verdades irrefutables y sólidamente sustentadas como se pensaba, sino que eran verdades relativas y de carácter temporal.

El surgimiento en el siglo XIX de las geometrías no euclidianas (y del álgebra de los cuaterniones), puso de manifiesto con claridad que la matemática construida hasta entonces, no era necesariamente la descripción del diseño de la naturaleza o, incluso, que no existía tal diseño, ya que habían surgido otras geometrías, que a pesar de estar en contradicción con la geometría imperante, eran igualmente útiles para describir y explicar el comportamiento de los fenómenos naturales. Esto significaba que recurrir a la naturaleza como criterio de verdad de las leyes matemáticas, no era un criterio confiable, ya que ésta validaba igualmente proposiciones matemáticas contradictorias, pero también representó un duro golpe a la concepción platónica de la naturaleza de los objetos matemáticos y fortaleció la convicción de que éstos eran creaciones de la mente humana.

La pérdida de confianza en la naturaleza como criterio de verdad de las leyes y principios matemáticos y la convicción de que éstos eran construcciones humanas y no objetos con existencia a priori, motivó que los matemáticos se propusieran revisar los fundamentos sobre los que habían construido ese grandioso edificio que hasta entonces había mostrado una gran fortaleza, pero que con las nuevas geometrías se había cimbrado y provocado profundas grietas.

Estos hechos orientaron la actividad de los matemáticos hacia la solución de los nuevos problemas planteados por la necesidad de sustentar la matemática sobre nuevas bases, cuya característica fundamental debía ser el máximo rigor lógico en la fundamentación de la matemática, evitando por completo, recurrir a cualquier argumento que no pudiera justificarse con los principios y las leyes de la lógica. Este proceso se conoce como rigorización de la matemática.

En esta etapa también se pone de manifiesto el papel fundamental que tienen los problemas, aunque de naturaleza diferente a los problemas planteados por el estudio de la naturaleza, como motivadores de nuevos sistemas de prácticas, de los que emergieron nuevos objetos matemáticos cuyos significados se fueron construyendo y enriqueciendo en ese proceso de resolución de los nuevos problemas planteados.

Lo antes dicho, de ninguna manera significa que la matemática haya dejado de ser eficaz en la descripción y explicación de los fenómenos de la naturaleza, sino por el contrario, el tener una idea más adecuada de la naturaleza de los objetos matemáticos, de sus métodos y procedimientos, permitió iniciar el proceso de fundamentación de la misma sobre otras bases, así como utilizar estas nuevas creaciones matemáticas para describir y explicar fenómenos naturales que no podían describirse y explicarse con la matemática previa, incluso, estas nuevas creaciones sirvieron de fundamento a un nuevo paradigma en la concepción del universo.

Los significados de los objetos matemáticos como obstáculos epistemológicos

El desarrollo de la matemática está plagado de ejemplos de cómo el significado construido de un objeto matemático, expresado en un determinado sistema de prácticas en un cierto contexto, representó en otro momento de su desarrollo, y por ende en otro contexto, un *obstáculo epistemológico* para asimilar al significado de dicho objeto, nuevos sistemas de prácticas e interpretar esta asimilación como un proceso de resignificación del objeto que diversifica y enriquece el significado previamente construido.

Un ejemplo especialmente útil para ilustrar lo anterior es el objeto *número*, cuyo significado surgió asociado a la cantidad de elementos de un conjunto dado, es decir, como número cardinal asociado a lo que hoy llamamos cardinalidad de un conjunto, esta significación constituyó un fuerte obstáculo para que en la Grecia Antigua, se reconociera y aceptara los hoy denominados *números racionales*, como números. Los griegos hablaban de la razón entre dos números, sin reconocer a dicha razón como un número propiamente dicho, incluso crearon una teoría sobre razones y proporciones que indica que conocían muchas de sus propiedades, pero no lograron asimilarlos e integrarlos al sistema de los números.

La introducción y uso de los enteros negativos por los hindúes y los árabes en el siglo VI de nuestra era, provocó una resistencia tan prolongada que aún después de la edad media, en Europa había matemáticos de renombre que se resistían a aceptar su utilización bajo el argumento de que era un absurdo la existencia de números menores que nada, de la misma manera que no concebían restarle un número mayor a otro menor. El surgimiento y uso de los números imaginarios o complejos igualmente enfrentó una fuerte resistencia aun entre los matemáticos brillantes de la época. Al respecto, algunos de ellos, declaraban:

> Un número admite ser restado de otro número mayor que él, pero intentar restarlo de un número menor que él es ridículo […] (Frend, 1796. p. x Preface.).
>
> El uso de $\sqrt{-1}$, cantidad que, decía Cauchy (1847), -podemos repudiar por completo y debemos abandonar sin pena, pues no sabe qué significa ese pretendido símbolo ni qué sentido se le debe atribuir- (Kline, 2000, p. 185).

El surgimiento del Cálculo en el siglo XVII, cuyos objetos matemáticos emergentes de los novedosos sistemas de prácticas implementados para la resolución de los problemas abordados, cuya característica esencial era la variación, es otro ejemplo muy ilustrativo de la naturaleza de los obstáculos epistemológicos, ya que enfrentó fuertes resistencias y críticas de connotados matemáticos de la época que se negaban a aceptar la inclusión y el uso de los objetos “infinitesimal” e “infinitamente grande”, a pesar de que mostraban ser tan útiles y eficaces en el cálculo para la resolución de los problemas planteados, ya que violentaban el significado de cantidad (número real) del que se disponía en ese momento. Para los matemáticos de la época era inaceptable la respuesta de Leibniz a la pregunta de cuál era el valor de esas cantidades que él llamaba “infinitesimales” o “infinitamente grandes”, ya que a esto respondía, que eran “inasignables”, es decir, que no se les podía asignar un valor numérico, pero que eran de una gran utilidad para realizar cálculos y obtener resultados verdaderos, utilidad que desaparecía si se optaba por asignarles un valor real.

Algo similar ocurrió con los objetos matemáticos construidos por Newton en el contexto de los fenómenos del movimiento que se propuso describir y explicar.

Así, podrían citarse muchos otros ejemplos de obstáculos epistemológicos constituidos por los significados construidos en determinado momento y contexto que se expresaron en fuertes resistencias para aceptar nuevos objetos o diversificar sus significados.

Algunas consideraciones sobre didáctica de la matemática

Todo lo anterior obliga a los interesados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela, a plantearse las siguientes preguntas: i) ¿El estudio del origen y desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, así como de los obstáculos epistemológicos que en un cierto momento representaron, proporciona algunos elementos útiles para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula escolar?; ii) ¿Dicho estudio proporciona elementos para el diseño de estrategias de enseñanza que sean más adecuadas para el propósito de mejorar significativamente el desempeño matemático de nuestros alumnos?

En los dos casos se asume que la respuesta es afirmativa.

Primero, porque está demostrado con creces, que presentar en la escuela, la matemática como un cuerpo de conocimientos acabado, lógicamente estructurado, dejando de lado las situaciones que dieron origen y motivaron el desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, partiendo de la premisa de que es posible apropiarse de ellos por un simple acto de transmisión del conocimiento y, que una vez comprendido el significado formal, es prácticamente automática la transferencia de dichos significados y en consecuencia se estará en condiciones de utilizar eficazmente los conceptos y métodos de la disciplina en el análisis, interpretación y resolución de problemas en diferentes y variados contextos, ha conducido a resultados que se encuentran muy alejados de los esperados.

Segundo, porque el conocer las situaciones que dieron lugar al surgimiento de los sistemas de prácticas que constituyen los significados de los objetos matemáticos considerados como emergentes, así como las dificultades que enfrentaron y las estrategias y caminos que se siguieron para superarlas, ayuda a la comprensión de las dificultades que enfrentan los alumnos cuando se espera que dominen con cierta eficacia determinados conceptos y procedimientos matemáticos, pero también, dicho estudio nos brinda recursos que nos permiten orientar de mejor manera su actividad para que puedan superar con mayor eficacia dichas dificultades. Esto no significa de ninguna manera, que consideremos que en el aula escolar se reproduzca íntegramente el proceso histórico de construcción del conocimiento, ya que en este caso, dicho proceso es conducido y coordinado por el profesor, sin embargo, hay elementos en común en ambos procesos que deben ser considerados a la hora de presentar la matemática en el aula.

Finalmente, porque si el origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos muestra que estos son creaciones humanas que emergieron del diseño y la implementación de sistemas de prácticas para la resolución de problemas, podemos suponer entonces que el papel del profesor, lejos de ser el de un presentador a través de la exposición, de los objetos matemáticos, debe ser el de un diseñador de situaciones problémicas que se ubiquen en la zona de desarrollo potencial de los alumnos y que provoquen y estimulen su actividad intelectual, con el propósito de que de dicha actividad emerjan los objetos matemáticos a estudiar y sus significados y debe entonces, ser también un conductor y orientador de dicha actividad.

Conclusiones

En el análisis que se ha hecho del desarrollo de la matemática, se ha asumido que ésta es una construcción humana y que los objetos matemáticos son de naturaleza pragmática, lo cual implica que el objeto emerge de un sistema de prácticas creado para analizar y resolver cierto tipo de situaciones problémicas,

El análisis del origen y desarrollo de objetos matemáticos tales como: cantidad, número, infinitésimo, límite, etc., ha permitido valorar la eficacia de las herramientas conceptuales y metodológicas utilizadas para llevar a cabo dicho análisis.

Un constructo teórico, especialmente útil para la Didáctica, es el de *obstáculo epistemológico* que ayuda a entender las dificultades que tienen los estudiantes para modificar una concepción previamente construida y proporciona elementos para el diseño de estrategias didácticas para superarlos.

La investigación que se ha realizado en el campo de la Epistemología, sobre el origen y desarrollo de la Matemática, ha sido de gran utilidad en Didáctica de la Matemática pues ha permitido identificar elementos que ayudan a comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Frend, W. (1796) *Principios de Álgebra*

Godino, J. (2010a). *Perspectiva de la didáctica de la matemática como disciplina tecnocientífica.* Recuperado el 12 de enero de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. (2010b). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* Recuperado el 12 de enero de 2011 de http://www.ugr.es/local/jgodino)

Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor.* México: Trillas.

Kline, M. (2000). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI editores.