

# RÉPLICA A LA PONENCIA “ADOPTANDO DIFERENTES PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA”

## Answer to “Different perspectives research about derivative concept”

Carmen Azcárate

Universitat Autònoma de Barcelona

### Resumen

*En esta réplica a la ponencia presentada por la profesora Sánchez-Matamoros, y después de unas consideraciones personales, se destaca su trayectoria investigadora centrada en analizar la comprensión del concepto de derivada abarcando los ámbitos de aprendizaje (en alumnos de secundaria) y de enseñanza (en futuros profesores de matemáticas). Se señalan sus aportaciones en el marco de la teoría APOE reflejadas en numerosas publicaciones y su aplicación al campo de la formación de profesores.*

**Palabras claves:** *derivada, desarrollo de la comprensión, formación de profesores, competencia docente, mirar profesionalmente.*

### Abstract

*In this answer to the paper of Gloria Sánchez-Matamoros, and after some personal considerations, I will underline her research trajectory which is centred on the analysis of the understanding of the derivative concept focused on learning (secondary pupils) and teaching (mathematics teachers training). I will point out her contributions to the APOS theory reflected on several publications and their applications to the area of teachers training.*

**Key words:** *derivative, development of understanding, prospective teacher training, professional competence, professional noticing.*

### APUNTES PERSONALES

En octubre se me acaba el emeritaje que he disfrutado durante 4 años, el plazo máximo que da la universidad a este tipo de contrato. En ese momento dicen que dejaré de ser profesora universitaria. Bien es verdad que me he ido distanciando poco a poco de mis funciones en el departamento, pero he mantenido mi fidelidad a la SEIEM, entre otras cosas por formar parte del equipo que ha puesto en marcha la revista AIEM. No os vais a librar de mí; son buenas y muchas las amistades que tengo aquí y que no quiero perder de vista.

La derivada de una función, otro tema personal. En 1990 presenté mi tesis doctoral "La velocidad: introducción a la derivada". A los escépticos y descreídos respecto a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, les invitaría a revisar y comparar mi tesis y los últimos trabajos de Gloria: el paso dado es gigantesco y para mí es un motivo de satisfacción, no dudo que compartido por nuestra comunidad.

Solo quiero hacer un poco de historia que viene al caso. Cuando empecé a interesarme por el tema de la enseñanza de la derivada, junto con el Grup Zero de Barcelona y con el apoyo de un material de Claude Janvier, introducir la derivada antes de estudiar límites y, por tanto, prescindiendo de la fórmula típica, era totalmente innovador e incluso muy mal visto por la comunidad docente. Con el material del Grup Zero se empezaba a enseñar la derivada con un enfoque de pre-cálculo donde se profundiza en los conceptos de pendiente de una recta, tangente a una curva y cálculo de la pendiente de la tangente por aproximación, a partir de las pendientes de las secantes. Así es cómo

aparece en alguno de los problemas presentados por Gloria a sus estudiantes para profesor. Un tema interesante sería saber cómo esos estudiantes aprendieron el concepto de derivada cuando eran alumnos preuniversitarios y cómo han vivido el proceso de plantearse otro modo de enseñar.

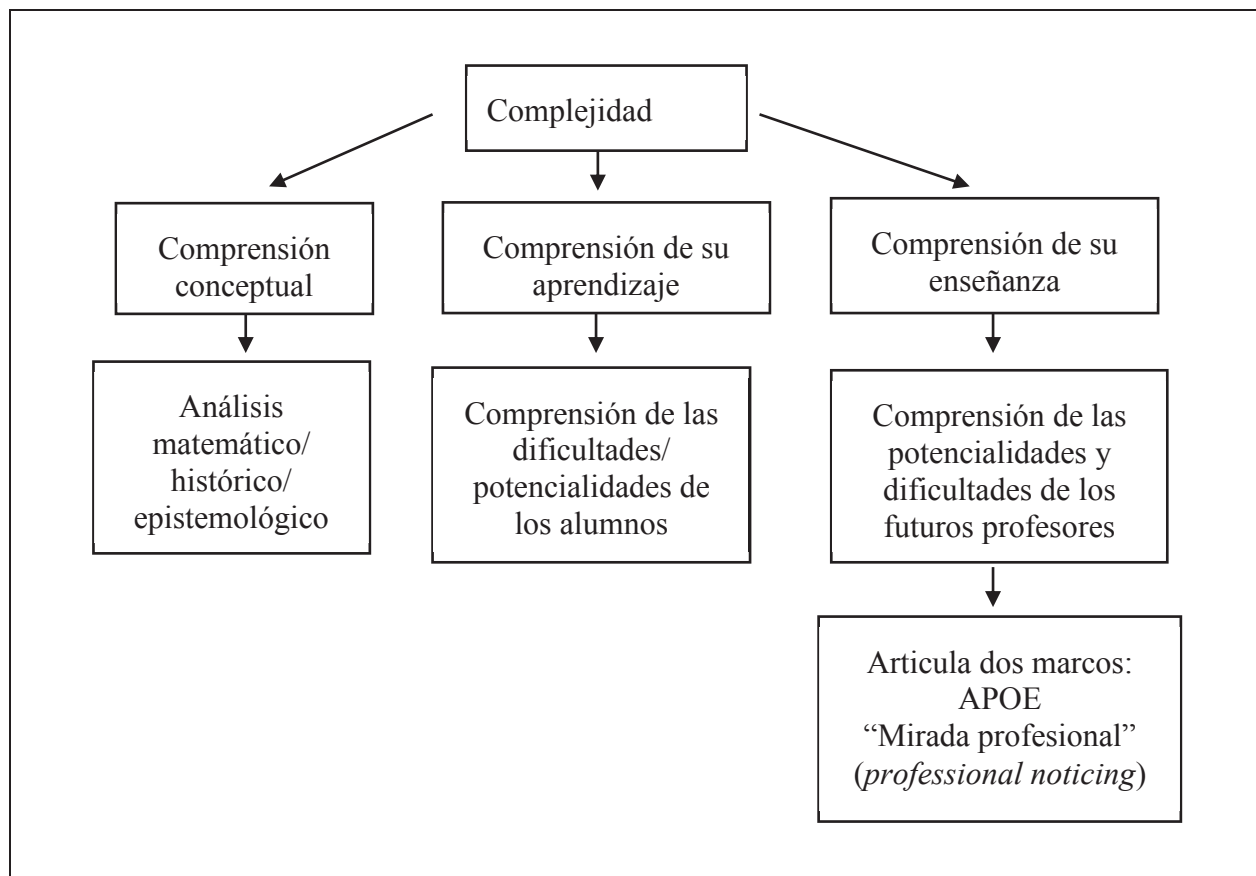
## IDEAS RELEVANTES DE LA PONENCIA DE GLORIA SÁNCHEZ-MATAMOROS

### El objeto de investigación

La trayectoria investigadora de Gloria se centra en analizar la comprensión de la derivada de una función, un concepto complejo asociado al cálculo diferencial. Lo primero que salta a la vista es la riqueza y amplitud de su enfoque que abarca los dos ámbitos de la problemática:

- (1) la derivada como objeto de aprendizaje (alumnos de bachillerato y universidad);
- (2) la derivada como objeto de enseñanza (futuros profesores de matemáticas de secundaria).

Este doble objetivo le ha llevado a profundizar en los dos aspectos basándose en los resultados de las líneas de investigación sobre análisis matemático que se han desarrollado en los últimos años tanto en nuestra comunidad como internacionalmente. Podemos visualizar este doble enfoque en el esquema siguiente que pone de manifiesto cómo, a partir de un análisis matemático, histórico y epistemológico de la complejidad del concepto de derivada y del estudio de las dificultades de su comprensión en alumnos de bachillerato, se investiga la comprensión de su enseñanza en futuros profesores de matemáticas en formación.



### Aportaciones teóricas

Destaco el rigor y la exhaustividad teórica en su forma de abordar los problemas de investigación en cada etapa o momento de su trayectoria investigadora. De igual manera, es especialmente interesante el hecho de situarse muy claramente en una perspectiva teórica, el modelo APOE, y enriquecerla con los resultados de sus investigaciones. Esto se refleja en numerosas publicaciones en revistas de reconocido prestigio internacional que están en las bases de datos especializadas del

área, que aparecen en el portal Web of Knowledge (WOK)/ Web of Science (WOS) y tienen índice de impacto JCR en el área Education and Educational Research. Entre otras: *Enseñanza de las Ciencias*, *Relime*, *Bolema* e *International Journal of Science and Mathematics Education*.

No obstante, su coherencia en el uso de la perspectiva teórica adoptada (APOE) no le impide articularla y complementarla con perspectivas centradas en el desarrollo de competencias profesionales en los profesores. Concretamente, el desarrollo de la competencia docente “mirada profesional” en las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (*professional noticing*). Esta aproximación le ha permitido ampliar y enriquecer los resultados de sus estudios previos sobre el desarrollo del esquema de la derivada basados en APOE, con su aplicación a un contexto distinto como es la formación de futuros profesores de secundaria.

Sus investigaciones contribuyen, en los dos ámbitos descritos anteriormente, a comprender constructos teóricos desarrollados en la teoría APOE que no estaban suficientemente definidos o ejemplificados. Así, ha profundizado en la comprensión de los niveles de desarrollo del esquema de derivada, enriqueciendo la propuesta de APOE, basada en la tríada *intra*, *inter* y *trans* de Piaget y García, con evidencias de que este desarrollo:

- (1) está vinculado con la coordinación de los elementos del concepto durante la resolución de problemas;
- (2) está influenciado por los modos de representación a la hora de establecer relaciones.

Y, sobre todo, ha investigado la comprensión de los mecanismos de abstracción reflexiva, en particular el mecanismo de TEMATIZACIÓN, vinculados a la comprensión del desarrollo del esquema de la derivada.

### **Principales aplicaciones**

Considero que las aportaciones de sus estudios a la línea de investigación sobre el análisis matemático, en general, y sobre el cálculo diferencial, en particular, no sólo contribuyen a la investigación, sino que sus resultados tienen un importante grado de transferencia a la transformación de las prácticas de aula tanto en secundaria como en la formación de profesores. Esto queda evidenciado en el uso de los resultados de sus primeras investigaciones para generar tareas formativas que ayuden al desarrollo de la competencia profesional (mirar con sentido) en contextos formativos del máster de secundaria, tal y como lo reflejan sus más recientes publicaciones: *Actas de la SEIM* (2012 y 2013); *International Journal of Science and Mathematics Education* (2014).

### **Proyecciones**

Su proyección y crecimiento profesional están ligados a un grupo de investigación que ha introducido una tendencia metodológica en el análisis de datos de investigación, propia de la teoría adoptada, APOE:

- análisis matemático riguroso por parte del equipo de investigación,
- diseño y validación de instrumentos entre sus miembros,
- difusión de los resultados con miembros del equipo de investigación.

Esta dinámica de investigación se manifiesta en sus publicaciones en revistas y sus aportaciones a congresos con diferentes miembros del equipo. Esto es coherente con la tendencia actual de investigar y publicar en red de investigadores (equipos de la Universidad de Sevilla y de la Universidad de Alicante).

### **Un comentario más**

Sin duda los resultados que se nos presentan indican que el módulo diseñado ha tenido bastante éxito en la mejora de la capacidad de los estudiantes para profesor para detectar información relevante en la manera de proceder de los estudiantes de Bachillerato y reconocer la comprensión de la derivada puesta de manifiesto a través de la resolución de problemas por parte de estudiantes de Bachillerato. No tengo la menor reserva respecto de la metodología utilizada en estas investigaciones y las conclusiones obtenidas. Sin embargo, como he apuntado al principio, me queda una enorme curiosidad acerca del proceso interno seguido por estos estudiantes. Según mi experiencia en la formación de profesores de secundaria, lo más difícil para ellos es romper con la equivalencia explicar/enseñar. Como matemáticos recientes, su vida en las aulas de matemáticas de todos los niveles ha sido cómoda y, en general, son reticentes a reconocer las dificultades de aprendizaje de unos conceptos que resultan obvios para ellos.