NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 84, noviembre de 2013, páginas 99-113

Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización

Sandra Graciela Baccelli
Sergio Anchorena
Emilce Graciela Moler
María Andrea G. Aznar
(Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina)

Fecha de recepción: 8 de enero de 2013
Fecha de aceptación: 1 de julio de 2013

Resumen En este trabajo se presenta un análisis exploratorio descriptivo de las dificultades de los alumnos para resolver problemas de optimización, dicho análisis se realiza a fin de mejorar las estrategias de enseñanza de este tema. Se analizaron las producciones de alumnos de la primera asignatura de Análisis Matemático de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata utilizando conceptos del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática. Los resultados del análisis muestran que las dificultades detectadas, en la mayoría de las resoluciones, se encuentran en algunos de los procedimientos empleados al resolver dichos problemas. La identificación de dichos procedimientos permitirá intervenir sobre ellos para lograr un mejor desempeño a la hora de resolver problemas de optimización.

Palabras clave Problemas, optimización, procedimientos, configuraciones, ingeniería.

Abstract This paper presents a descriptive exploratory analysis of students difficulties when solving optimization problems; this analysis is performed in order to improve teaching strategies in this topic. The productions analyzed belonged to students of the first course of Mathematical Analysis of Engineering careers in Universidad Nacional de Mar del Plata. The analysis was performed using concepts provided by Ontosemiotic Approach of Mathematics Instruction and Cognition. Test results show that difficulties detected in the majority of resolutions are in some of the procedures used to solve these kind of problems. Identification of these procedures allow to intervene on them for better performance when solving optimization problems.

Keywords Problems, optimization, procedures, configurations, engineering.

1. Introducción

Es notorio observar cómo en nuestro andar cotidiano escuchamos reiteradas veces expresiones tales como "reducir costos" o "aumentar el rendimiento", que implican las nociones matemáticas de minimizar y maximizar. Encontrar el mínimo costo de producción para la obtención del máximo rendimiento, minimizar recursos y el uso de energía, la máxima altura alcanzada por un atleta al saltar son ejemplos de problemas de optimización. En general el hombre tiene como objetivo la optimización de tal o cual cosa para la obtención del éxito en una cuestión determinada o para la toma de decisiones.

Pino, Godino y Font (2011) hacen referencia a problemas sobre máximos y mínimos que han tenido una trascendencia histórica, como el problema de Fermat, cuyo enunciado expresa: *"Dividir un segmento de longitud N en dos partes de manera que el producto sea el máximo posible"*. También reseñan el problema abordado por Kepler sobre el cálculo de volúmenes de barriles de vino; en él se analiza la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino).

En particular, para los ingenieros la optimización adquiere un rol esencial en el desarrollo de su profesión: los problemas que los ingenieros deben resolver implican, casi siempre, como tarea específica, obtener la solución de un problema técnico optimizando el uso de los recursos disponibles. Dicha optimización consiste en lograr la producción máxima, utilizando una dotación fija de recursos, o bien obtener un nivel de producción dado utilizando la mínima cantidad de recursos. Por lo anteriormente expuesto adquiere relevancia la enseñanza de procesos vinculados con la optimización.

En este contexto, los contenidos de matemática, referidos a máximos y mínimos relativos de funciones, se vinculan directamente con las competencias y capacidades necesarias para llevar adelante exitosamente este tipo de tarea.

Es por eso que resulta preocupante que en primer año de las carreras de ingeniería, cuando se propone a los alumnos ciertos problemas que requieren realizar tareas de optimización, la mayoría de ellos fracase en su resolución. Este es el caso del primer curso de Análisis Matemático de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. En su desarrollo, una vez estudiados los conceptos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función, se proponen problemas de optimización que aplican dichos conceptos. En el momento de las evaluaciones parciales, la mayoría de los estudiantes ni siquiera aborda estos problemas. Mientras que los que intentan resolverlos, evidencian notorias dificultades en el análisis, en el planteo y en el desarrollo de los mismos.

Este trabajo forma parte de la investigación realizada en el marco de una tesis de maestría para optar por el grado de Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior de la Universidad Nacional de Tucumán. La pregunta directriz que guía dicha investigación es: *¿Cuáles son las dificultades que obstaculizan el desempeño de los alumnos de primer año de la Facultad de Ingeniería de la UNMDP en la resolución de problemas de optimización?*

Este artículo se focaliza en el análisis exploratorio desarrollado para identificar las posibles causas que pueden estar ocasionando la aparición de las dificultades en los procedimientos intervinientes en problemas de optimización. Para dicho análisis se plantean los siguientes objetivos:

- Clasificar las dificultades encontradas en la resolución de problemas de optimización, con las herramientas del Marco Teórico-Metodológico provistas por el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS)
- Obtener información relevante para el diseño de estrategias de enseñanza.

La complejidad que subyace en dar respuesta a la pregunta directriz de esta investigación se aborda utilizando herramientas EOS, poniendo el énfasis en los significados que los distintos actores asignan a los objetos matemáticos.

1.1 Antecedentes

Se pueden mencionar antecedentes importantes de investigaciones que abordaron este tema utilizando como marco teórico el EOS.

Malaspina (2008), en su tesis doctoral, destaca la importancia del análisis y la interacción de los objetos matemáticos en las configuraciones epistémicas y cognitivas. Asimismo, afirma que el análisis de dichas configuraciones informa sobre la anatomía de la actividad matemática.

Por su parte, en la tesis de maestría que presenta Dávila (2010), se realiza el análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, orientado a la modelización y a la resolución de problemas de optimización en contexto extra matemático.

En un trabajo anterior, Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto (2012), presentan un análisis exploratorio descriptivo de las dificultades de los alumnos para resolver un problema de optimización, concluyendo que las mayores dificultades se presentan en algunos procedimientos críticos.

Por su parte Moreno Guzmán y Cuevas Vallejo (2004), referenciando autores de otras líneas teóricas, muestran que los estudiantes realizan interpretaciones erróneas sobre máximos y mínimos ante problemas no rutinarios y justifican como posible causa los procesos de instrucción que favorecen un aprendizaje de algoritmos memorísticos.

A continuación se presentan los elementos del marco teórico que se utilizan en el presente trabajo.

2. Marco Teórico

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollado por Godino, Batanero y Font (2009), pretende explicar y valorar los procesos que se producen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, teniendo en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado.

Uno de los conceptos principales de este enfoque es el de *práctica matemática*, concebida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las prácticas pueden ser características de una persona, o compartidas en el seno de una institución. En estas prácticas matemáticas intervienen objetos, que pueden ser *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. El objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas (Godino, 2002).

El significado de un objeto matemático se considera *institucional* cuando emerge de un sistema de prácticas matemáticas en un campo de problemas. Por otro lado, el significado de un objeto se considera *personal* cuando emerge de la práctica de una persona, y está igualmente asociado a la resolución de cierto tipo de problemas en una institución, donde las personas se encuentran involucradas en la resolución de una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. “Las instituciones se conciben como ‘comunidades de prácticas’, e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. Se asume, por tanto, el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados” (Godino, Batanero y Font, 2009, p.5).

A la disparidad o discordancia entre los significados institucionales y personales se la denomina conflicto semiótico. Si dicha disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

Los objetos que emergen de las prácticas van sufriendo transformaciones a lo largo del tiempo, incrementando el campo de problemas y modificando el sistema de prácticas para ampliar sus significados. En un primer nivel, se proponen los siguientes tipos de objetos denominados primarios:

> “- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)
> - Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,...)
> - Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...)
> - Proposiciones (enunciados sobre conceptos,...)
> - Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...)
> - Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).” (Godino y cols., 2009, p. 7)

En particular, estos seis tipos de objetos primarios amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos que intervienen y emergen de la actividad matemática. Estos objetos se relacionan formando *configuraciones*, pensadas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, incluidas las relaciones que se establecen entre los mismos (Figura 1). Estas configuraciones pueden ser *epistémicas*, desde una mirada institucional, o *cognitivas*, desde un punto de vista personal.

Marcel Pochulu describe las relaciones existentes entre los objetos primarios diciendo:

> En las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones-problemas son origen o razón de ser de la actividad, y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para la acción. Los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre si, todo lo cual viene a regular el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación. (Pochulu, 2012, pp.70)

Figura 1. Componentes de una configuración epistémica/cognitiva- Fuente: Pochulu (2012)

Los *sistemas de prácticas* y las *configuraciones* se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble faceta personal e institucional. El análisis de estas configuraciones informa sobre la "anatomía" de la actividad matemática.

Dentro de los tipos de objetos que se relacionan en las configuraciones mencionadas adquiere relevancia el estudio de los procedimientos. La misma radica en que, al observar los errores que cometen los alumnos al aplicarlos, se puede detectar la existencia de posibles conflictos semióticos.

3. Metodología

La población a la que refiere esta investigación está formada por todos los alumnos de la asignatura Análisis Matemático A perteneciente al primer año de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. El total de alumnos que intervinieron fue de 183, pertenecientes a distintas comisiones de la asignatura antes mencionada.

3.1. Descripción de las estrategias de enseñanza implementadas para el desarrollo del tema en la asignatura

La asignatura Análisis Matemático A es de carácter cuatrimestral. Se dictan clases teóricas y prácticas en horarios diferenciados en ambos cuatrimestres. Los problemas de optimización se ubican después del desarrollo de conceptos relativos a derivada y diferencial de una función en una variable, y antes de integrales definidas. Específicamente, una vez desarrollados los Teoremas del Valor Medio, L`Hospital, Taylor y Mac Laurin, se abordan los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función, junto con la definición de extremos. Los problemas de optimización se desarrollan luego de esta última definición.

Referidos a este tema los docentes que imparten los conceptos teóricos muestran a los alumnos, a modo de ejemplo, la resolución de un problema de optimización, esta clase es de tipo magistral. Los problemas de optimización se proponen en la guía de trabajos prácticos de Aplicaciones de la derivada, luego de la guía de Derivada y diferencial y antes de la guía correspondiente a Integrales definidas. En la guía de trabajos prácticos mencionada, los problemas en cuestión, se ubican luego de la ejercitación referida a crecimiento, decrecimiento y extremos de una función. Algunos de ellos aplican conceptos geométricos y los otros hacen referencia a relaciones numéricas. Durante estas clases prácticas los alumnos realizan sus consultas en forma individual o grupal a los docentes e interactúan con sus pares. Históricamente las consultas que se realizan sobre estos problemas son muy pocas, cuestión que sugiere que no todos los alumnos encaran la resolución de estos problemas.

La evaluación de este contenido se realiza en el segundo parcial y en los exámenes Totalizadores, para aquellos alumnos que no logran la promoción de la materia.

3.2. Instrumento: Problemas de optimización propuestos

Después de la resolución de los problemas que se proponen en la guía de trabajos, durante las clases prácticas de cada comisión, se administró el instrumento que se muestra en la Figura 2, que propone la resolución de dos problemas de optimización. Se les aclaró a los alumnos que plasmaran en la hoja todo tipo de planteo, justificación y argumentación que utilizaran para la resolución de dichos problemas. Cabe aclarar que el nivel de dificultad presentado en dicho instrumento es similar al de los problemas propuestos por la cátedra. El Problema 1(P1) se presenta en forma coloquial y en el Problema 2(P2) el enunciado es acompañado por un gráfico cartesiano que ejemplifica la situación planteada.

Problema 1 (P1)

Determinar la mayor área que puede encerrar un rombo cuyo lado mide 1 metro. (Recordar que un rombo tiene todos sus lados congruentes y su área es la mitad del producto de sus diagonales).

Problema 2 (P2)

Determinar las dimensiones que debe tener un rectángulo con dos de sus lados sobre los ejes X e Y y el vértice opuesto al origen de coordenadas sobre la recta que pasa por (0,3) y (4,0), como el que se muestra en la figura, para que su área sea máxima.

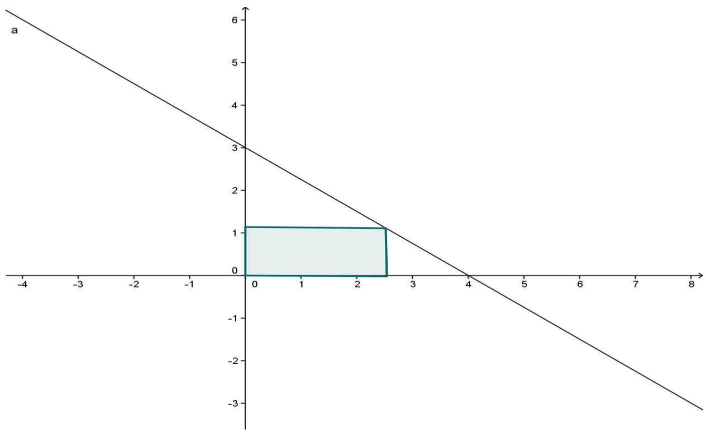

Figura 2. Problemas de optimización propuestos.

3.3. Configuración epistémica de P1 y P2

Para realizar un análisis cualitativo de las soluciones obtenidas de los alumnos se confeccionó la configuración epistémica de cada problema. Para ello se consideraron las resoluciones a ambos problemas efectuada por expertos, uno de ellos docente de la asignatura Análisis Matemático y el otro docente e investigador de esta universidad. Se muestran en la Tabla 1 las configuraciones de ambos problemas.

Objetos Matemáticos	Especificaciones P1	Especificaciones P2
Lenguaje	**Gráfico:** representación del rombo como figura de análisis, trazado de sus diagonales. **Términos y expresiones:** longitud, área, cateto, hipotenusa, triángulo rectángulo. **Notación**: f(x) como función área, f'(x) y f´´(x) como derivada primera y segunda respectivamente. Lados y diagonal mayor y menor. **Símbolos**: números, +, -, ( ) , [ ], =, raíz cuadrada, ⇒, <, >. El ostensivo "{" que abarca la expresión que representa el área y la de la aplicación del teorema de Pitágoras necesarios para el armado de la función.	**Grafico:** ejes cartesianos, gráfica de la recta, rectángulo apoyado en los ejes. **Términos y expresiones:** dimensiones de un rectángulo, área, notación de derivada, ecuación de la recta de manera no ostensiva pero sí evidente por los puntos en los que corta a los ejes, igualdad, implicación. **Notación:** f(x) como función área, f'(x) y f´´(x) como derivada primera y segunda respectivamente. x e y como representación de los lados del rectángulo y como variables dependiente e independiente de la recta. **Símbolos**: números, +, -, ( ) , [ ], =, raíz cuadrada, ⇒, <, >. El ostensivo "{" que abarca la expresión que representa el área y la ecuación de la recta o que sirve para agrupar algunas cuestiones con cierta relación.
Situación – problema	Enunciado del problema de optimización.	Enunciado del problema de optimización.
Conceptos	**Previos**: Están implícitas las definiciones de rombo y de área. El enunciado da una parte de la definición, pues no se incluye que es un cuadrilátero paralelogramo, sólo se aclara que todos sus lados son iguales, característica necesaria para la resolución del problema. Respecto del área, se da la definición de la respectiva fórmula para el rombo, en forma coloquial, no simbólica, lo cual es apropiado al no haber gráfico en el enunciado sobre el cual referenciar los símbolos que aparecieran. Derivada primera y segunda. Máximo relativo. **Emergentes**: Área máxima de un rombo para un lado de longitud dada.	**Previos:** Área de un rectángulo, derivada primera y segunda, recta que pasa por dos puntos, distancia, dimensiones de un rectángulo, máximo relativo. **Emergentes**: Área máxima de un rectángulo cuya altura está determinada por la pertenencia de un vértice a una recta dada.

Objetos Matemáticos	Especificaciones P1	Especificaciones P2
Proposiciones	✓El área de un rombo es la mitad del producto de sus diagonales. ✓La suma del cuadrado de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. ✓Criterio de la derivada primera o segunda para la obtención de puntos Extremos. ✓Las diagonales de un rombo se cortan en su punto medio en forma perpendicular.	✓El área de un rectángulo es el producto de sus lados. ✓Criterio de la derivada primera o segunda para la obtención de puntos extremos. ✓Dos puntos determinan en forma unívoca una recta.
Procedimientos	✓Operaciones aritméticas elementales ✓Expresión de la función área en dos variables, las diagonales del rombo. ✓Planteo de la condición pitagórica considerando la mitad de las diagonales como catetos. ✓Expresión en función de una variable la función área. ✓Cálculo de la derivada primera y segunda de una función por medio de reglas. ✓Obtención del punto crítico ✓Cálculo del área	✓Operaciones aritméticas elementales ✓Pasaje de la representación gráfica a la representación funcional recta, identificando pendiente y ordenada al origen. ✓Expresión de la función área en dos variables, la base y la altura del rectángulo. ✓Planteo de la recta dada como condición de pertenencia del vértice libre del rectángulo. ✓Expresión del área como función de una variable, sustituyendo la altura del rectángulo por la función lineal a la que pertenece el vértice libre del rectángulo. . ✓Cálculo de la derivada primera y segunda, aplicación de las reglas. ✓Obtención del punto crítico ✓Cálculo del área
Argumentos	✓La longitud de un lado es un valor numérico positivo. ✓Si la derivada segunda en un punto crítico es menor que cero entonces en ese punto existe un máximo relativo. ✓La medida de la diagonal que hace máxima el área de un rombo de lado 1cm determina la medida de la otra diagonal y específicamente su área.	✓Si a la izquierda o derecha de un punto de su dominio la función cambia de crecimiento existe máximo o mínimo ✓Si la derivada segunda en un punto crítico es menor que cero entonces en ese punto existe un máximo relativo. ✓La medida del lado de un rectángulo cuyos lados están sobre los ejes coordenados del primer cuadrante, de vértice libre perteneciente a la recta determinada por dos puntos, que hace máxima su área determina el otro lado.

Tabla 1. Configuración epistémica de los problemas - Fuente: Baccelli y otros (2012)

Al efectuar una comparación, entre ambas configuraciones epistémicas, se observa que cada objeto primario de una de ellas se "replica" en la otra de acuerdo a la especificidad de cada problema. De lo que se infiere que ambos problemas refieren a los mismos objetos matemáticos en relación con los problemas de optimización que nos ocupan.

Se analizaron las resoluciones de ambos problemas desarrolladas por cada alumno, comparando los objetos presentes en sus resoluciones con los de las configuraciones epistémicas. La presencia o ausencia de los objetos primarios fue consignada en un protocolo que describe el desempeño de los alumnos y pretende identificar, en la configuración cognitiva, cuál de estos objetos presenta mayores dificultades.

Para su construcción se consideraron algunos elementos del protocolo presentado por Malaspina (2007) en el análisis de las resoluciones en problemas de optimización. La información que se obtiene se puede analizar desde diferentes aspectos de acuerdo al tipo de objeto primario que se quiere observar y analizar.

En este trabajo se muestran los resultados del análisis de uno de los grupos de objetos primarios intervinientes en las configuraciones: los procedimientos. De estos últimos se presenta su categorización, utilizando para ello un diagrama que muestra los porcentajes de ambos problemas.

4. Resultados y Análisis

En este apartado se presenta una síntesis del protocolo utilizado para registrar las actuaciones de los alumnos, algunas resoluciones de los problemas presentados que muestran las dificultades que se observaron en la corrección del instrumento y la categorización realizada de los procedimientos en base al protocolo obtenido.

La Tabla 2 muestra los porcentajes obtenidos al observar particularmente los procedimientos y argumentaciones, objetos primarios fundamentales de las configuraciones cognitivas, contrastadas con las configuraciones epistémicas previamente elaboradas para cada problema. Cabe aclarar que se tuvo en cuenta como respuesta satisfactoria la de aquellos alumnos que encontraron el valor extremo, sin considerar si argumentaron o no por qué el valor obtenido es máximo

<table>
<tr><th colspan="3">Situación Problema</th><th>P1</th><th>P2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Hallan lo pedido</td><td colspan="2">Si</td><td>30%</td><td>27%</td></tr>
<tr><td colspan="2">No</td><td>70%</td><td>73%</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Procedimiento Utilizado</td><td colspan="2">Plantea la función área</td><td>55%</td><td>51%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plantea la condición</td><td>36%</td><td>49%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresa la función área en una variable</td><td>22%</td><td>26%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Deriva</td><td>Correctamente</td><td>12%</td><td>22%</td></tr>
<tr><td>Incorrectamente</td><td>8%</td><td>3%</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Argumenta por qué el valor obtenido es óptimo</td><td colspan="2">No</td><td>16%</td><td>15%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si</td><td>2%</td><td>9%</td></tr>
</table>

Tabla 2. Síntesis del protocolo utilizado para el análisis.

El bajo porcentaje de estudiantes que resuelven los problemas propuestos es similar en un problema y en el otro, ambos cercanos al 30%.

Para ejemplificar la actuación de los alumnos al resolver los problemas se muestran, en la Figura 3 y en la Figura 4, las resoluciones al P1 y al P2, respectivamente, de dos alumnos con algunos de los objetos primarios (procedimientos) intervinientes en ella.

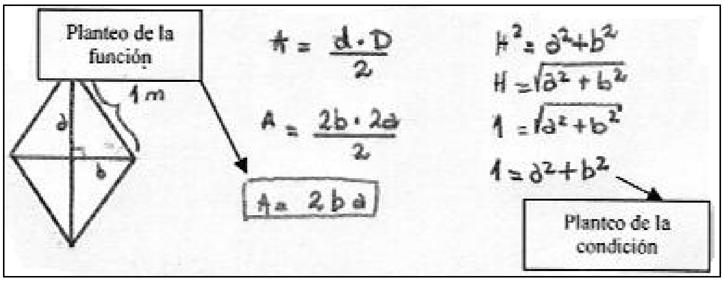

Figura 3. Un ejemplo de resolución del P1

En la resolución que se muestra en la Figura 3, se observan los siguientes procedimientos desarrollados por el alumno:

- el planteo de la relación pitagórica como condición del problema, procedimiento logrado por el 36% de los alumnos.
- la expresión de la función que representa el área del rombo, procedimiento logrado por el 55% de los alumnos.

En el caso ilustrado, a pesar de haber logrado los procedimientos mencionados, el alumno no llega a plantear la función en una variable, procedimiento logrado sólo por el 22% de los alumnos, lo que impide la resolución del problema.

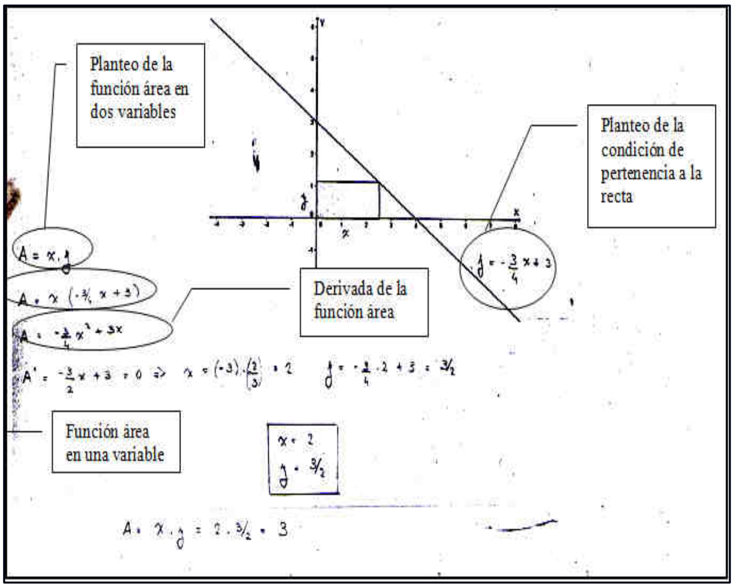

Figura 4. Un ejemplo de resolución del P2

En el ejemplo de la Figura 4 se resaltan los procedimientos intervinientes en la configuración cognitiva:

- la determinación de la función área en función de los lados del rectángulo, procedimiento logrado por el 51% de los alumnos.
- la obtención de la ecuación de la recta que representa la condición del problema, procedimiento logrado por el 49% de los alumnos.
- el planteo de la función en una variable, procedimiento logrado sólo por el 26% de los alumnos.
- la obtención de función derivada, procedimiento logrado por el 22% de los alumnos.

Este alumno obtiene el punto crítico aunque no argumenta por qué el valor obtenido es el óptimo, presentado sólo por el 9% de los casos analizados para el P2 y un 2% en el P1.

En el análisis de las respuestas de los alumnos a los problemas propuestos se observaron unas pocas que no son comparables con la configuración epistémica realizada. Tal es el caso de la que se muestra en la Figura 5 y en la Figura 6.

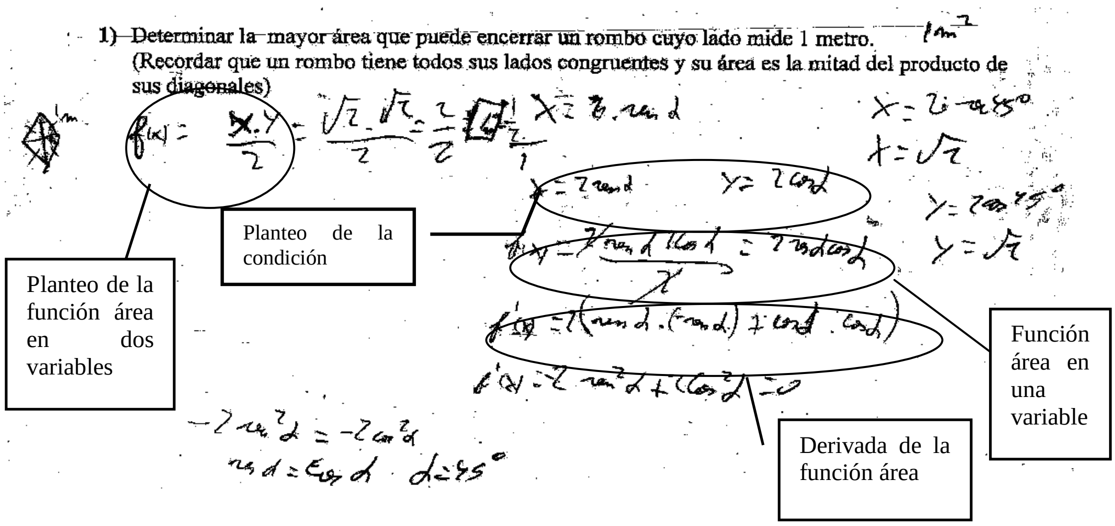

Figura 5. Resolución del alumno 22

En la resolución que presenta el Alumno 22 el planteo de la función área está expresado en función de las diagonales. Es notable observar que recurre a conceptos trigonométricos para plantearla como función de una variable, utilizando el ángulo determinado por la diagonal y uno de sus lados. Deriva en función de ese ángulo, a pesar de mostrar la expresión derivada en x. Recurre nuevamente a herramientas de trigonometría para encontrar el punto crítico. Da la respuesta correcta pero no argumenta si dicho valor hace máxima el área. Es importante observar el conflicto notacional que se produce cuando el alumno utiliza la expresión “f(x)”. Al emplear esta expresión alude a una función de una única variable independiente x, sin embargo la función que referencia depende de dos variables independientes: x e y. Posteriormente, al expresar las variables x e y en función del ángulo al que llama “α”, la función debería ser representada como f(α); no obstante, mantiene la expresión “f(x)” pero deriva correctamente, en función de la variable independiente α.

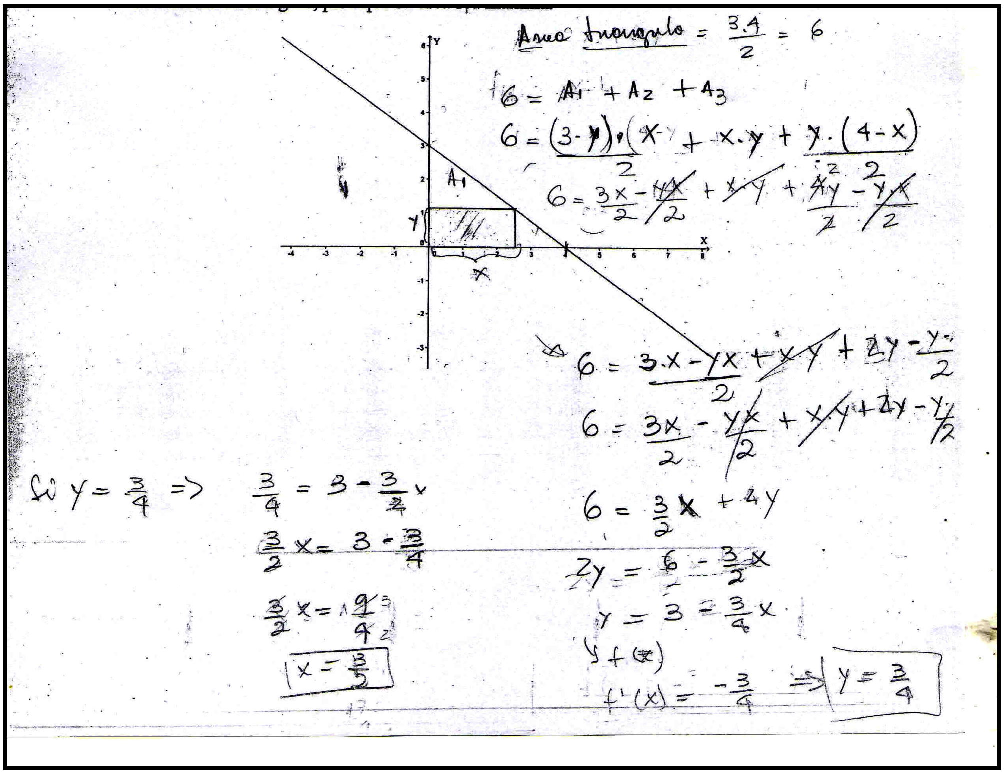

Figura 6. Resolución del alumno 5

La manera de encontrar la ecuación de la recta determinada por dos puntos, que realiza el alumno 5, hace que esta resolución no pueda ser comparada con la configuración epistémica. A partir del registro gráfico, obtiene el área del triángulo formado por la recta y los semiejes positivos y la iguala a la suma de las áreas del rectángulo y los dos triángulos que la completan. No plantea la función a optimizar correctamente y hace un intento de aplicación del criterio de la derivada primera de manera errónea.

Sólo uno de los alumnos presenta una solución por aproximaciones sucesivas o tanteos, asignando diferentes valores a la variable x en P2, mientras que ninguno presenta una solución asignando diferentes valores a la variable x, realizando tanteos en P1. Ninguna de las soluciones, presentadas en P2, corresponde al análisis de una función cuadrática, camino posible para la resolución. Esto último a modo de ejemplo para identificar uno de los caminos posibles de resolución. Es por ello, que se observa que este grupo de alumnos están muy orientados en la búsqueda de herramientas dentro del análisis matemático, sin aplicar conocimientos previos aprendidos en cursos anteriores.

A modo de resumen se presenta el diagrama de árbol, que se muestra en la Figura 7, que categoriza en base a las frecuencias absolutas de aparición de los procedimientos involucrados en la resolución de estos problemas por los alumnos, y que determinan la secuencia de pasos que conducen a la resolución final. No se incluyen en la categorización realizada la obtención del punto crítico y el cálculo del área por no presentar diferencias con quienes logran derivar correctamente.

Para la confección de dicho diagrama se tuvo en cuenta la categorización realizada para problemas de optimización en Baccelli (2012). En cada cuadro del diagrama mencionado figuran las frecuencias absolutas que corresponden al P1 y al P2, de manera que resulte clara la comparación de las frecuencias en ambos problemas.

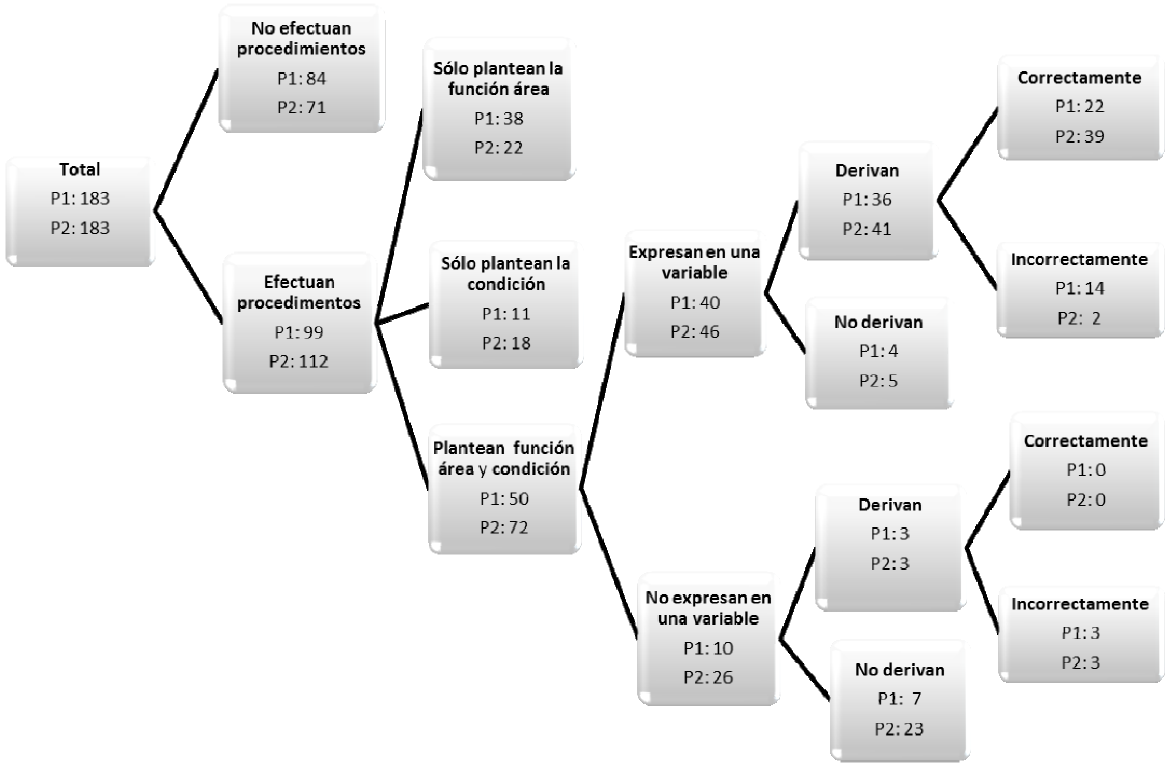

Figura 7. Diagrama de frecuencias absolutas de categorías y subcategorías procedimentales

Es posible observar un comportamiento similar en ambos problemas. Algunas categorías como por ejemplo la referida al planteo de la función y la condición, incluyen 50 alumnos en P1 contra 72 en P2. Si ahora se observa la cantidad de alumnos que plantean la función área en una variable, la frecuencia disminuye en ambos problemas. El planteo de la función en una variable es alcanzado por 46 alumnos de los 72 que plantean área y condición del P2. En cambio, en P1 40 alumnos plantean la función en una variable sobre los 50 que logran expresar área y condición. Estas últimas frecuencias absolutas sugieren que en P1 la relación pitagórica utilizada permite la emergencia de este procedimiento. En cambio en P2 la frecuencia es significativamente menor, la presentación de este problema en el registro gráfico no parece favorecer la visualización de que el lado libre del rectángulo depende de la recta.

Este último es un procedimiento clave para la obtención de puntos extremos a partir de la derivación de funciones de una variable. Es de observar que los estudiantes que logran expresar la función en una variable son, en su mayoría, aquellos que la derivan correctamente.

5. Conclusiones

Las configuraciones epistémicas y cognitivas, construidas de acuerdo con el EOS son herramientas teóricas y metodológicas que estructuran y visualizan la red de objetos que intervienen en un sistema de prácticas matemáticas. Por esto representan un insumo fundamental para el análisis del significado de un objeto matemático, tanto desde el punto de vista personal como institucional.

En este trabajo, el análisis realizado a partir de la comparación de las configuraciones epistémicas de cada problema con las configuraciones cognitivas de los alumnos, permitió determinar los objetos primarios, intervinientes en la resolución de los problemas de optimización, que presentan mayores dificultades o bien que no están presentes a la hora de ponerlos en práctica para resolver los problemas antes mencionados.

El grado de detalle que proporcionan las configuraciones revela el significado personal, presente en cada uno de los integrantes de este grupo de alumnos, y el significado institucional referido a problemas de optimización.

Los dos ítems propuestos para resolver, si bien corresponden al mismo campo de problemas, están enunciados desde dos registros diferentes. En P1 el registro es coloquial, a diferencia de P2 que se enuncia, fundamentalmente, en el registro gráfico. Sin embargo, el porcentaje de alumnos que logra encontrar la respuesta a cada problema es similar.

La ausencia de argumentación es notoria y se hace evidente en el bajo porcentaje de alumnos que argumentaron sus procedimientos en ambos problemas. El análisis de las dificultades de los alumnos para argumentar será estudio de futuras investigaciones.

Los resultados obtenidos nos inducen a mirar críticamente las prácticas matemáticas. Estas prácticas suelen, en general, priorizar el cálculo de derivadas dejando en segundo plano la formulación y la resolución de problemas, que debería ser la actividad central donde intervienen los objetos primarios, en especial los procedimientos fundamentales para dicha resolución. Esta misma situación suele trasladarse a los instrumentos de evaluación, mediante los cuales los alumnos logran la aprobación sin la resolución satisfactoria de problemas de optimización, siendo ésta la tarea más específica del ingeniero que apunta al desarrollo de una de las competencias formuladas en el documento final del XL Plenario del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería, CONFEDI (2006): "identificar, formular y resolver problemas de ingeniería".

Los resultados y conclusiones obtenidos impulsan a investigar en propuestas destinadas a contribuir a desarrollar estrategias de enseñanza y evaluación que, por un lado contribuyan a identificar y aprender los procedimientos involucrados en la resolución de problemas de optimización y, por otro, permitan identificar aquellas falencias que, de permanecer luego de la promoción de una materia, dificulten la adquisición de las competencias propias de la profesión del ingeniero.

En este trabajo se ha presentado un primer reporte de la investigación, centrado en el análisis de los procedimientos, que pretende servir de base para futuros trabajos. Se espera en una etapa posterior ampliar esta investigación mediante el estudio de conflictos semióticos.

Bibliografía

Baccelli, S., Anchorena, S., Figueroa, S.M., Prieto, G. (2012). Análisis de un problema de optimización desde el enfoque ontosemiótico. Revista Educación Matemática de la FAMAF. Vol. 27. Recuperado el 16 de junio de 2012 de: http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/#rev_intro_volumen

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (2006). Competencias Genéricas de Ingeniería – Documento final. Recuperado el 2 de diciembre de 2010 de http://www.confedi.org.ar/component/option,com_docman/task,cat_view/gid,20/Itemid,44/

Dávila, M. T. (2010). La Derivada a Partir de Problemas de Optimización en Ambientes Dinámicos Creados con GeoGebra (Tesis doctoral inédita). Universidad de Sonora. México.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* URL: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22 (2/3), 237–284.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (3), 365-399.

Malaspina, U. (2008). Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Tesis doctoral inédita). Escuela de graduados. Pontificia Universidad Católica del Perú

Moreno, S., Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Educación Matemática*,16 (2), 93-104. Santillana. Distrito Federal, México

Pino, L., Godino, J., Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educación Matemática. Pesquisa*, 13 (1), 141-178.

Pochulu, M. (2012). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (compiladores) *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, 63-89. Editorial Universitaria Villa María: Villa María.

Sandra Graciela Baccelli. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, nació en 1960, es Profesora Universitaria en Matemática. Especialista en Investigación Educativa. Docente e investigadora del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería. Integrante del proyecto de investigación: Análisis de procesos de construcción de significados en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en carreras de ingeniería. sbaccelli@gmail.com

Sergio Anchorena. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, nació en 1963, es Ingeniero en Construcciones, Profesor en Cs. de la Educación y Licenciado en Economía, con maestrías en Cs. Sociales, Epistemología, Economía y Desarrollo, Dr. por la Universidad del País Vasco, post doctorado en el Dpto. de Informática y Matemática Aplicada de la UFRN (Brasil). Docente en las Facultades de Cs. Económicas, Humanidades y Cs. de la Salud, Co director del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Ingeniería. pollo_mdp@yahoo.com

Emilce Graciela Moler. Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, nació en 1959, es Profesora Universitaria en Matemática. Magister Scientiae en Epistemología y Metodología de la Ciencia. Doctora en Ciencias Biológicas (Orientación en Bioingeniería). Profesora Adjunta, dedicación exclusiva. Facultad de Ingeniería. Área: Informática Aplicada. Directora del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Ingeniería. egmoler@yahoo.com.ar

María Andrea G. Aznar. Universidad Nacional de Mar del Plata, nació en 1967, es Profesora Universitaria en Matemática, Especialista en Investigación Educativa. Docente en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata y en el nivel medio, miembro del Grupo de Investigación en Enseñanza de la Matemática en Ingeniería