

## DIFICULTADES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO ALGEBRAICO DE SEGUNDO ORDEN A TRAVÉS DE SUCESIONES, PARA DEFINIR EL ENÉSIMO TÉRMINO

Juan Carlos Osorio Paulino

CINVESTAV - IPN

josorio@cinvestav.mx, thinkingmathematics@live.com

(México)

**Resumen.** Esta investigación que forma parte de las tesis de maestría, se realiza en México con estudiantes de secundaria, de edades 14-15 años. El objetivo es dar a conocer las dificultades; que a partir de un análisis comparativo, tienen los alumnos al tratar de construir una expresión algebraica de segundo orden que defina el  $n$ ésimo término al usar sucesiones figurativas. Para ello, se ha estado haciendo uso de dos de sus cuatro componentes del Modelo Teórico Local [MTL] (Fillooy, 1999): modelo de enseñanza y de procesos cognoscitivos. Se realiza una evaluación diagnóstica, se clasifica a la población según los distintos perfiles: alto, medio y bajo rendimiento, para observar en entrevista clínica videograbada y elaborar un reporte de observaciones acorde al esquema de desarrollo de experimentación perteneciente al MTL.

**Palabras clave:** pensamiento algebraico, patrones figurativos, generalización

**Abstract.** This research is part of the thesis for a master's degree in Mexico with students of secondary school, ages 14-15 years. The aim is to show the difficulties; from a comparative analysis, students have trying to build an algebraic expression of second order to define the  $n$ th term of a sequence of figures. Therefore, we used two of the four components of the Local Theoretical Model [MTL] (Fillooy 1999) i.e.: model of education and cognitive processes. A diagnostic assessment, classifies the population according to the different profiles: high, medium and low performance seen in clinical interviews on video and then we prepare a report according to the schema development belonging to the MTL experimental observations.

**Key words:** thinking algebraic, figurative patterns, generalization

### Introducción

Hay una variedad de artículos e investigaciones asociadas al razonamiento algebraico, a los procesos de generalización y estrategias que intervienen y se emplean en aula de clase para tratar el contenido matemático que refiere a sucesiones, pero, específicamente en las que su forma de proceder es de tipo lineal. Asimismo, se hace hincapié en diversas investigaciones, de cómo el emplear sucesiones figurativas o numéricas resulta tan estratégico que, permite al alumno generalizar: analizar el comportamiento matemático de los patrones, organizar la información e interpretarla y diseñar una expresión algebraica que represente los incrementos de cada uno de los elementos o términos de una sucesión.

Este tema constituye ya una parte de la currícula o propuesta institucional de algunos sistemas educativos entre ellos está el Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 1989), en el cual se hace referencia a que el alumno debe explorar patrones. Tal es el caso también de la propuesta institucional del Ministerio de Ciencia Diseño (1989), que en su Diseño Curricular de Base se hace alusión a la variedad de fenómenos de tipo lineal y cuadrático. Otro caso es el del programa de estudio

que propone la (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2006) en México, en el cual se puede constatar de que ya existe el tratamiento de éste tópico matemático, aunque éste no está explícito, no en el sentido de redacción, si no en el número de actividades (son pocas) que se proponen al tema de sucesiones figurativas de segundo orden; es decir, a aquellas donde el comportamiento matemático de los términos es de forma cuadrática. Lo anterior, dirime los objetivos que el programa de estudios tiene como fundamento.

¿Cómo proceden los alumnos para ser competentes en el Sistema Matemático de Signos? ¿Qué dificultades presentan los alumnos a tratar con éste contenido matemático? Son algunas de las cuestiones que se establecen como puntos de partida para la investigación en proceso.

### Justificación

El programa de estudios de educación secundaria (SEP, 2006) alude a que los alumnos deben ver lo general en lo particular, esto es que a través de sucesiones, regidas por un patrón permitan al estudiante identificar e interpretar en forma o en términos algebraicos el comportamiento matemático que tiene dicha sucesión.

Luego, si éste es una de las afirmaciones que la currícula quiere echar andar, ¿por qué las lecciones y problemas que se están sugiriendo, no están compensadas con otras más? Cuando además el programa de estudios en uno de sus apartados denota en su enfoque que los alumnos al verse inmiscuidos en cualquier actividad, deben hacer uso de procesos, en primer plano lo informal para concluir en un estado de convencionalidad.

Sabiendo que estos elementos son una parte importante para desarrollar en los alumnos, habilidades algebraicas.

Se ha encontrado que hacer uso de patrones es una importante estrategia para la resolución de problemas en matemáticas (Stacey, 1989) esto implica que al alumno va a permitirle al explorar, identificar el comportamiento de patrones y, representar de forma algebraica y numérica cualquier término en función de cómo el incremento de los valores permanece constante, por ello y por resultar una estrategia que permite resolver problemas, es indispensable tratar en la currícula con mayor énfasis éste contenido, no descuidando los objetivos que dispone ésta. De igual manera, es preciso acercarse a los procedimientos empleados por los alumnos, pues serán el punto de partida para aclarar que lo informal puede adaptarse y convertirse en lo formal, debido a que como se hace mención en el Curriculum and Evaluation for School Mathematics (National Council of Teacher of Mathematics) el emplear éste proceso de descubrimiento, a través de sucesiones para llegar a la generalidad implica resolver problemas de tipo informal para construir álgebra, esto quiere decir, que si el

alumno trata éste tipo de sucesiones figurativas conllevará a identificar: cómo es el incremento en cada uno de los términos de una sucesión, si permanece o no constante, y entonces proceder a generar un expresión algebraica que vincule los incrementos figurativos-numéricos y pasar a formar parte de manera subsecuente del álgebra formal.

Al estudiar álgebra, los alumnos hacen uso de símbolos a los cuales hay que asignarles un significado y establecer los primeros elementos ya que son los que pasan a formar parte de la sintaxis del contenido a tratar. Sin dejar de considerar que las herramientas, tales como la extracción, representación e interpretación de la información (Herbert & Brown, 1997) son parte fundamental para llegar a consolidar el álgebra formal. Por ende, sí el alumno explora situaciones que impliquen deducir fórmulas mediante una sucesión figurativa, se hace uso de las herramientas y símbolos que entrelazan al álgebra.

Las imágenes que en su caso son los patrones-figurativos, forman parte de la interacción entre el sujeto y los problemas, debido a esto, las figuras cobran un papel importante en este proceso de investigación, pues están asociadas a una sucesión, siendo éstas un recurso o medio de comunicación que permite transmitir ideas, conceptos, fórmulas sólo por mencionar algunos de los muchos beneficios que se obtienen del uso de ellas.

El reconocimiento de patrones, conlleva a generar aproximaciones a fórmulas: como es el caso de la visualización, ya que al ser modificada la figura en relación al número de elementos que tiene el conjunto (término) permite observar el cambio (incremento en el número de elementos) y sucesivamente construir los elementos faltantes para posterior, a partir de los anteriores conjuntos (términos) se formule una expresión algebraica que represente el comportamiento de un patrón de forma generalizada.

Calvillo y Cantoral (2007. p. 424) definen a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual.

Según (Socas. 1989. citado por Socas, Camacho, Paralea & Hernández, 1989. p. 142) “la experiencia y la historia han mostrado la importancia de la visualización como una herramienta fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas”. Esta afirmación, no quiere decir que por naturaleza propia de la visualización aparezcan de forma automática las generalizaciones, por el contrario, sólo son un complemento para la comprensión de las situaciones que se están revisando.

### **Perspectiva teórica**

Para el sustento de éste artículo, se ha utilizado el Modelo Teórico Local (Fillooy, 1999). Dentro de este modelo existen cuatro componentes: modelos de enseñanza, para los procesos

cognoscitivos, competencia formal y modelo de comunicación, pero, cabe decir, que para el proyecto de investigación en curso, implica hacer uso de sólo dos componentes; modelos de enseñanza y procesos cognoscitivos. Sin embargo, los demás componentes restantes son indispensables en el sentido implícito.

Al tratar cualquier contenido matemático, los sujetos cometen en forma natural errores que a la postre generan dificultades para llevar a cabo de forma formal procedimientos de carácter sintáctico, esto debido a los mecanismos que se aferran a permanecer en el sujeto durante largo tiempo, aunque es importante decir que, estos conocimientos en una parte, son el punto de partida pues son los conocimientos previos indispensables para la construcción del conocimiento matemático. Por otro lado, cuando se habla de modelar, se está refiriendo a que las nuevas operaciones u objetos que pasaran a formar parte del sujeto deben ser dotadas de un significado y, tomando éste como punto de inicio, se construyen los primeros elementos de sintaxis. Luego, como se está tratando el contenido matemático perteneciente a sucesiones figurativas, por ende hay que de modelar los conocimientos que los alumnos tienen respecto a lo concreto para finalizar con él proceso de abstracción.

### **Modelo de Enseñanza**

Para desarrollar estrategias de enseñanza en los inicios de la adquisición de competencias de un Sistema Matemático de Signos es importante distinguir entre los modelajes concreto y sintáctico pues son en cierta manera, un punto relevante para generar estrategias en situaciones posteriores, el modelar en términos concretos se tome en ese contexto las nuevas operaciones y los nuevos objetos para dar a éstos un significado pertinente.

Resulta que, en este modelo concreto intervienen procesos en las acciones, como es el caso de la “abstracción de operaciones” que se ve perjudicado o en consecuencia presenta características en su desarrollo cuando el alumno hace uso de éste, debido a que puede variar entre cada sujeto, así como también, a la presencia de tendencias y relación que se tiene con su uso y aprendizaje de las matemáticas.

Cuando se piensa en la introducción de nociones matemáticas de cualquier índole (modelo concreto y sintáctico) es conveniente de acuerdo Filloy (1999) tener en mente algunas componentes de los modelos. Entre ellas destaca dos componentes fundamentales una la traducción que es donde se “dota de significado y sentido” en un contexto concreto (modelo concreto) a los nuevos objetos y operaciones que se introducen, mismos que estarán presentes en situaciones más abstractas; esto quiere decir, que mediante esta componente (traducción) se relaciona los elementos de una situación concreta con los elementos

pertenecientes a las situaciones de tipo abstracto y a partir de lo que ya se sabe en un contexto concreto. La segunda componente del modelaje es para Filloy (1999), la separación de los nuevos objetos y operaciones de los significados más concretos con que fueron introducidos; esto significa desprenderse de la semántica (la costumbre de ciertos usos) de modelo concreto, ya que en situaciones posteriores se pretende lograr que el sujeto no solamente resuelva situaciones que ya sabe resolver, si no por lo contrario, sería conveniente resolver situaciones más abstractas. Esto significa que el sujeto al entrar en el contexto de una situación o problema matemático, el alumno al usar sus conocimientos previos puede reestructurar de la situación en la que se encuentra involucrado; modificar, desechar y adaptar a diversas o nuevas situaciones sus conocimientos.

Sin embargo, para que la deficiencia en la componente de abstracción sea modelada y al sujeto no se le deje que se desarrolle de manera espontánea, debido a que tiende a ocultar lo que esencialmente se pretende enseñar debe ser fortalecida en el sentido amplio de ser tomada en cuenta y modelada en la enseñanza.

### Procesos Cognoscitivos

Los procesos cognoscitivos que se ponen en acción para llevar a cabo las formas del pensamiento matemático y su comunicación van afinando los elementos complejos como los que se utilizan:

en a) en la percepción que es más que el caso del manejo de las formas geométricas y sus transformaciones, b) en el direccionamiento de la atención y sus relaciones con el proceso de comprensión, c) el uso cada vez más intensivo de la memoria, d) en el desencadenamiento de proceso de análisis y síntesis cada vez más entrelazados con el uso de la lógica, e) en las concepciones heurísticas utilizadas en la resolución de las situaciones problémicas, f) en el aprendizaje muy ligado a los procesos de generalización y abstracción, y que requieren de usos novedosos de los SMS de la matemática escolar. (Filloy, 1999 p. 37)

### Método y desarrollo de la investigación

La investigación, de tipo cualitativo, examina en su primera fase documental, la propuesta institucional (SEP, 2006) para educación secundaria, con el objeto de identificar a nivel curricular cuáles son las orientaciones respecto a conceptos relacionados con álgebra, pero, en específico con sucesiones de tipo lineal y cuadrático. Así mismo, se examina el fichero de actividades (SEP, 2002) en el que a la par con el programa de estudio, contiene actividades relacionadas con patrones. Así mismo se ha hecho una revisión sobre la literatura (todavía

sigue en proceso) para concluir con el marco de referencia. Para que un determinado momento, se formulen hipótesis en términos de tesis teóricas. Para llevar a cabo el estado de experimentación (Véase figura 1): Preparación de las experiencias de aprendizaje, mecanismos de observación, clasificación y medición, y diseño del trabajo con los aprendices. En un primer acercamiento, con el fin de generar (a posteriori) y aplicar las actividades se aplicó un cuestionario exploratorio (evaluación diagnóstica) a un grupo de secundaria, con un total de 20 alumnos de entre 14 y 15 años de edad, para determinar la eficiencia del estado del conocimiento de los alumnos en relación al SMS (Sistema Matemático de Signos) más concreto del nuevo (más abstracto).

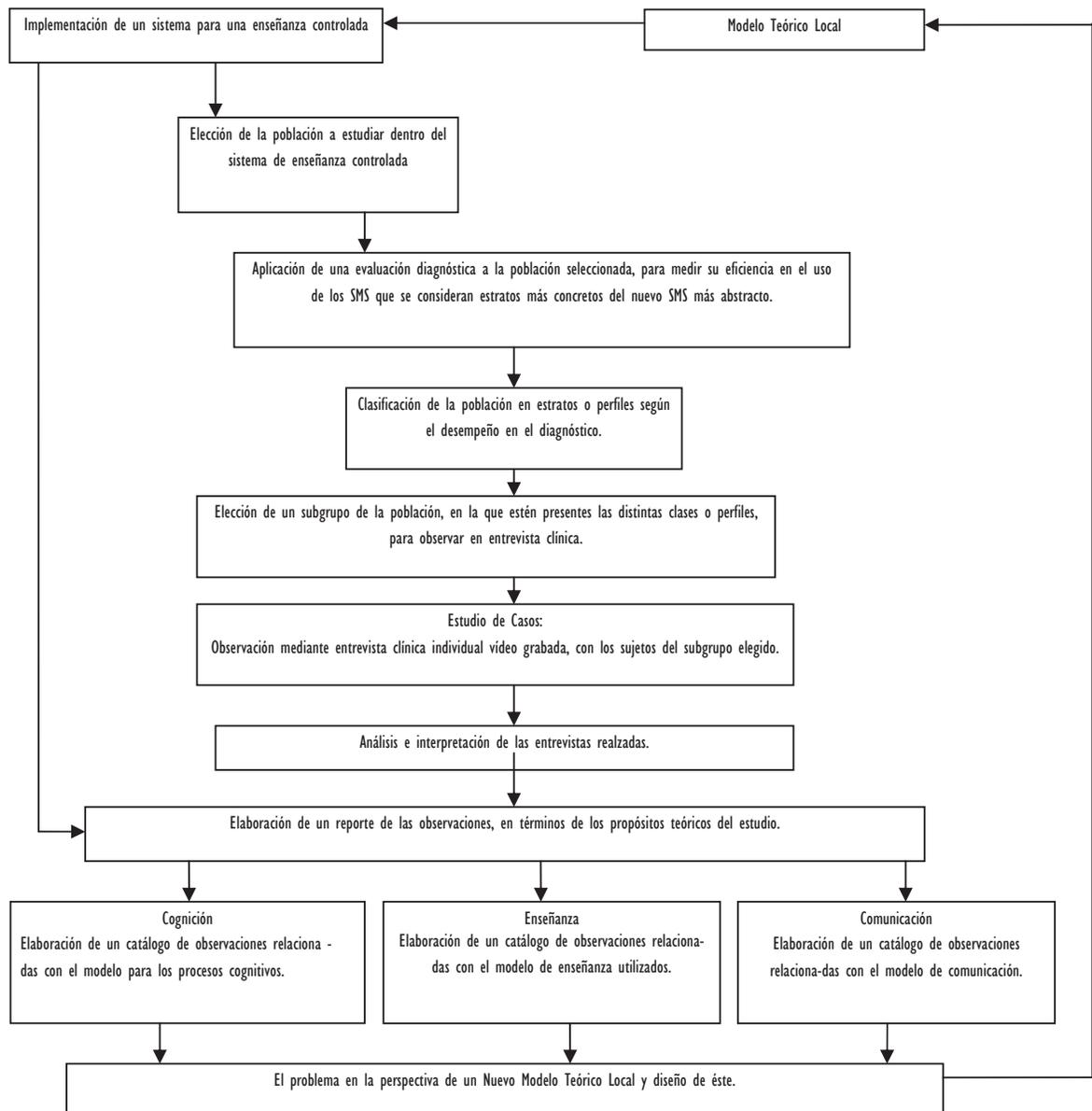


Figura 1. Esquema del desarrollo de la experimentación (Fillooy, 1999).

## Resultados e interpretación

Al hacer una revisión minuciosa sobre la propuesta institucional, se ha encontrado que las actividades que se proponen para explorar situaciones que involucren a sucesiones de segundo grado, que a su vez se expresan mediante el álgebra y en especial aquellas que refieren al uso del método de diferencias, son iguales a las que diversos libros sugieren, aunque cabe mencionar que no es el único recurso didáctico que también tiene en su contenido repetidas lecciones, esto también es para el caso de el fichero de actividades (SEP, 2000) que a la par con uno de los planes del programa de estudios clarifican el desarrollo del método de diferencias, pero con el mismo problema planteado.

La propuesta institucional para la educación secundaria tiene como propósito mediante el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico la insistencia en ver lo general en lo particular; obtención de la expresión algebraica para calcular un término de una sucesión regida por un patrón (SEP, 2006). Asimismo, hace referencia a situaciones en donde la sucesión de tipo lineal y de segundo orden intervienen en el desarrollo de conceptos, pero, cuando se habla de construir modelos que representan a ésta última situación, resulta que no está muy explícito en relación a las actividades. Este también es el caso del fichero de actividades (SEP, 2000), las consignas que se proponen, no están categorizadas con explicitud.

En una primera aproximación, los estudiantes utilizaron el método aritmético: tanteo. La actividad a realizar consistía en llenar espacios; es decir, completar varias sucesiones; tres de tipo lineal y una de segundo orden. En las primeras sucesiones, los alumnos no tuvieron problemas, utilizaron la operación suma, identificaron el comportamiento del patrón y descubrieron los términos faltantes. Cuando se trató de identificar cuáles eran los números que completarían a la sucesión de grado dos, los alumnos utilizaron el tanteo para estimar su resultado, sólo una alumna pudo completarlo, sin embargo, el resto de los estudiantes les fue complejo; no encontraban el patrón de comportamiento, las operaciones que se ejecutaban no tenían sentido, y por ende no completaban la sucesión. Otra actividad a realizar por parte del alumno está relacionado con secuencias de grado uno y dos (Figura 2), en ésta se pide que se encuentre a partir de una secuencia ordenada, el número de elementos que tendrá una figura intermedias de y posteriores posiciones de una sucesión, sin llegar a la generalidad, debido a que en ese punto, la actividad no lo contempla.

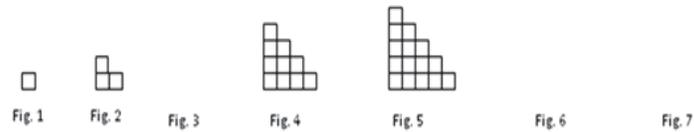


Figura 2. Sucesión de figuras de tipo dos.

Al comienzo de la actividad, los estudiantes resolvieron las condicionantes de la evaluación de forma individual. Como ya se mencionó, al aprendiz se le requirió que encontrar el número de cuadrados que contendría la figura (Fig.) 3, 6 y 7. En primera, por ejemplo una alumna descompuso por así decirlo, cada una de las figuras (Fig.) de esta manera (Véase Figura 3). Esto con el objeto de encontrar el número de elementos faltantes (cuadritos) de una figura.

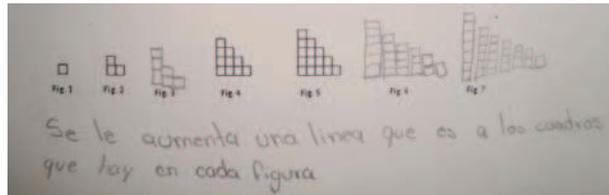


Figura 3. Descomposición de la estructura figurativa para encontrar otros valores

Respecto a sucesiones figurativas en donde el patrón se comporta de forma cuadrática y además se adjudica la condición de encontrar una expresión algebraica que permitiera definir cualquier término (figura), los alumnos optaron por hacer uso de combinaciones de sumas y restas, para determinar el número de estrellas o asteriscos que contenían las siguientes figuras (Figura 4). En cambio, otros estimaron sus resultados, se aproximaron mediante ensayo y error. A pesar de que alumnos (no muchos), encontraron una forma de construir las siguientes figuras; es decir, visualizar como parte de ellos para enlazar un sistema gráfico con uno de tipo formal, se encontró que en el intento por representar a la situación para definir el  $n$ ésimo término, vinculado con el patrón sucesivo y la expresión algebraica, el sujeto no determina esa relación. Entre tanto, el alumno llega a identificar cuantos elementos (asteriscos) contiene cada una de las figuras, como están colocadas y así efectuar operaciones si fuese necesario para relacionar el incremento de asteriscos, como el número de posición que corresponde a cierto número de elementos.

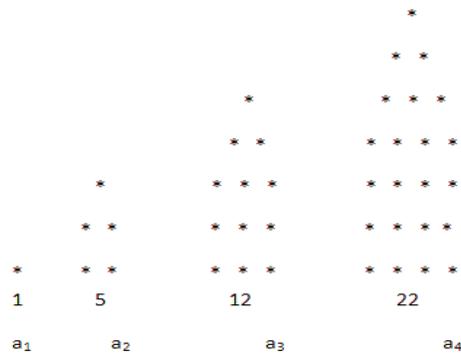


Figura 4. Secuencia de figuras de segundo orden.

### Conclusiones

En este primer acercamiento, se pudo constatar de cuáles son algunas de las estrategias y dificultades que presentan alumnos de secundaria al tratar con este contenido. Si bien es cierto, también se pudo observar que el método de tanteo al cual ha afianzado el alumno, esto es, que usan el ensayo y error para determinar valores faltantes de una sucesión sin poder llegar a la generalización. Cabe decir, que el usar este tipo de patrones figurativos pone en claro el papel que desempeña la visualización en términos de recurso para generar un sintetizador (expresión algebraica) que reitere el comportamiento de dichas sucesiones. Debido a que ayudo a legitimar la simbolización pero de forma aritmética.

Además, respecto a el currículo se pudo constatar de que en se requiere reforzar este tema, con más actividades para llegar a concebir una de las cuestiones propuestas, que no es más que ver lo general en lo particular.

### Referencias bibliográficas

- Calvillo, N. & Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones. En C. Crespo Crespo (Ed) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20 (pp. 421-426). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Filloy, E. (1999) *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa*. México: Iberoamérica.
- Herbert K. & Brown, R. (1997). Pattern as Tools for Algebraic Reasoning. *Teaching Children Mathematics* 3(6), 340-345.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: Council.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1989) *Diseño Curricular Base 1989. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid.

Secretaría de Educación Pública. (2000). *Fichero de actividades 2000. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: SEP

Secretaría de Educación Pública. (2006). *Programa de estudios 2006. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. Dirección General de Desarrollo Curricular. México: SEP.

Stacey K. (1989) Finding and Using Patterns in Linear Generalization Problems. *Educational Studies of Mathematic*, 20(2), 149-164.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid, España: Síntesis.