Aprender matemáticas en un entorno de álgebra computacional: los obstáculos constituyen oportunidades[1]

Paul Drijvers

Resumen

Utilizar álgebra computacional no es tan fácil como puede parecer. Frecuentemente, los estudiantes encuentran obstáculos mientras trabajan en un entorno de álgebra computacional. En este artículo se distinguen los obstáculos globales y los locales, y se identifican los de ambas categorías. La teoría de la instrumentación proporciona un marco para interpretar el obstáculo como un desequilibrio entre los aspectos conceptual y técnico de un esquema de instrumentación. Se argumenta que explicitar los obstáculos y tratar de superarlos, conduce al desarrollo conceptual. En consecuencia, los obstáculos constituyen oportunidades de aprendizaje.

Introducción

Cuando me enfrenté por primera vez con el álgebra computacional, a finales de los 80, me fascinó inmediatamente la potencia y velocidad del sistema, que, en mi caso, fue Derive. Parte de la fascinación era debida a la sensación de que hacer matemáticas con tal sistema parecía, por un lado, muy simple, y, por otro, requería pericia para usarlo eficientemente. Hacer tangible la naturaleza de esta competencia es una tarea interesante, pero difícil.

Por ejemplo, es fácil desarrollar una expresión como $(x + y)^3 + 1$ (ver #1, fig.1). Sin embargo, contrariamente a lo que pudiera parecer, transformar con Derive $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 1$ en $(x + y)^3 + 1$, no resulta tan fácil. La orden[2] factor, que funciona frecuentemente para "deshacer un desarrollo", conduce, en este caso, a un resultado diferente y más com-

---

1 Este artículo apareció originalmente en inglés en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) vol 34 (5) 2002. Ha sido traducido por Manuel Fernández Reyes. El autor agradece al profesor Manuel Fernández el trabajo realizado.

2 **Nota del Editor**. A lo largo de todo este artículo se traduce la palabra inglesa *comand* por orden y no por comando. Sabemos que hoy esta generalizado la traducción comando pero, en esta revista, seguiremos luchando contra la mala traducción del inglés siempre que se nos presente la oportunidad.

plejo (ver línea #3, fig. 1). Si no se sabe que la expresión $x^3 + 3x^2y + 3xy^2+y^3 +1$ es el desarrollo de $(x+y)^3 + 1$, se tiene que "ver" que $x+y$ podría ser un factor. La simetría de x e y en la expresión lo sugiere. Entonces, puede darse a $x + y$ un nombre, por ejemplo, z, hacer $y = z - x$ (línea #6), o bien, $x = z - y$, y sustituir finalmente $z = x+y$ (línea #8). Esto es fácil para un matemático, que tiene la pericia necesaria para advertir la simetría de x e y en la expresión, pero ¿lo es para un estudiante, que carece de pericia y experiencia en el entorno del álgebra computacional?

El ejemplo visto nos lleva a la cuestión didáctica de la que se ocupa este trabajo: ¿qué obstáculos encuentran los alumnos, cuando trabajan en un entorno de álgebra computacional, y cómo puede tratar estos obstáculos el profesor?

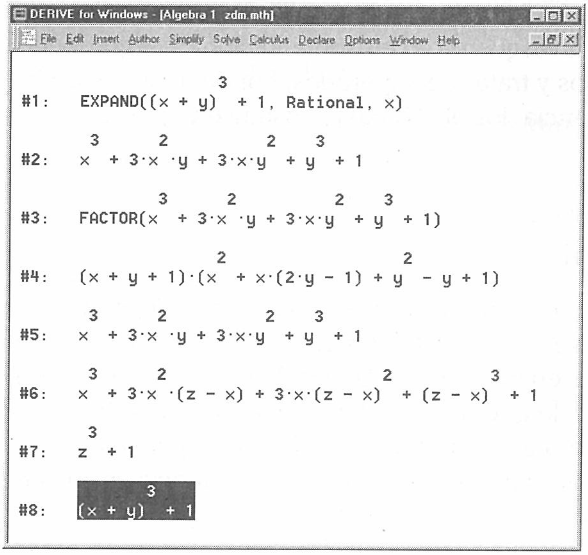

Figura 1. Encontrar el factor x+ y con Derive.

¿Por qué mantener un punto de vista "negativo" respecto a centrarnos en los obstáculos? En los primeros tiempos de empleo de sistemas de computación algebraica (CAS)[3] en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los educadores eran muy optimistas en cuanto a los posibles beneficios para el estudiante del empleo de herramientas de computación algebraica, pero las cuestiones referentes a las dificultades y obstá-

3 **Nota del Traductor**. Computer algebra systems (CAS): Programa de ordenador o calculadora que manipula expresiones simbólicas o ecuaciones, calcula o aproxima valores de las funciones o de las soluciones de ecuaciones y elabora gráficas de funciones y relaciones.

culos fueron apenas tratadas (ver, p.e., los temas tratados en Heugl & Kutzler, 1993). Pocos años después, Artigue (1997) argumentó que es relevante hacer un análisis de las limitaciones para comprender las potencialidades de una herramienta tecnológica:

"El trabajo analítico de identificación de las limitaciones es esencial para comprender los funcionamientos posibles del saber permitido por una lógica dada, para analizar las diferencias necesariamente existentes con los funcionamientos escolares usuales de este saber e identificar los conflictos y los problemas de legitimidad institucional que pueden resultar de ello"[4] (Artigue 1997, p. 139).

ZDM recoge lo que Guin y Trouche (2002) elaboraron sobre este tema, distinguiendo diferentes tipos de limitaciones. Pienso que es importante la relación entre las potencialidades de los entornos de álgebra computacional y los obstáculos que pueden generar, ya que las dificultades y los errores de los estudiantes pueden ser oportunidades para un aprendizaje real y, también, pueden proporcionar datos perspicaces para el profesor o el investigador.

El presente trabajo describe los obstáculos que encuentran los alumnos, y establece una distinción entre obstáculos globales y locales. Se argumenta que estos obstáculos ofrecen oportunidades para el aprendizaje de matemáticas. Las experiencias en clase durante tres experimentos de enseñanza conducen a una creciente lista de obstáculos.

En el apartado 2 se da una primera definición de obstáculo, un inventario de los obstáculos observados en el primer experimento, y se distinguen las dos categorías aludidas: globales y locales. En el apartado 3 se utiliza la teoría de la instrumentación para mejorar la categoría de los obstáculos locales –los algebraicos–, lo que da lugar a revisar la definición de obstáculo, y a considerar obstáculos nuevos, que fueron identificados en el segundo experimento. El apartado 4 trata la relación entre la concepción mental, la técnica del álgebra computacional y la de lápiz y papel, lo que lleva a un nuevo obstáculo global, observado durante el tercer experimento. El apartado 5 proporciona un ejemplo del comportamiento del estudiante, también observado en el tercer experimento, en el que se muestra la complejidad del frecuente entrelazamiento de los dos tipos de obstáculos. Por último, en el apartado 6 se resumen las conclusiones y se discuten algunas consecuencias relativas a la enseñanza.

---

4 **N.T.** En francés en el original.

Obstáculos globales y locales

Mi primera experiencia minuciosa y sistemática con los obstáculos del alumnado en un entorno de álgebra computacional tuvo lugar en un experimento de enseñanza en el nivel 11, el grado alemán SII. Los obstáculos se definieron como barreras debidas al CAS, que impiden realizar el esquema de utilización que el alumno tiene en mente (Drijvers 2000). Las observaciones llevan a la siguiente lista, no exhaustiva, de los obstáculos con que se encuentran los alumnos:

(1) La diferencia entre las representaciones algebraicas que proporciona el CAS y las que los alumnos esperan y conciben como "sencillas". Esto se refiere a las dificultades para reconocer que, por ejemplo, $-(x-12)$, dado por el CAS, equivale a la expresión $12-x$, que el alumno tenía en mente, o que $\sqrt{\frac{s}{4}}$ es igual a $\frac{1}{2}\sqrt{s}$. Reconocer expresiones equivalentes es un tema central en álgebra, y sigue siéndolo cuando se trabaja en un entorno de álgebra computacional.

(2) La diferencia entre cálculos numéricos y cómputos algebraicos y la forma implícita con que el CAS trata esta diferencia. Para muchos alumnos, $\sqrt{2}$ no es una respuesta real: consideran que 1,41 es el resultado final. Realmente no comprenden la diferencia de categoría de las dos respuestas: en $\sqrt{2}$ "hay todavía algo de álgebra", mientras que 1,41 es estrictamente numérica. El CAS no es siempre claro en cuanto a esta diferencia de categoría.

(3) La flexible concepción de las variables y los parámetros que requiere el uso de un CAS. Parafraseando a Orwel, podría decirse que en un entorno de álgebra computacional "todas las letras son iguales". Sin embargo, en un determinado contexto de problema, las variables tienen significados distintos y desempeñan diferentes papeles, tales como el de incógnita, parámetro o cantidad que cambia. El significado y el papel de la letra dependen "del color del cristal con que se miran". Un trabajo eficiente con un CAS requiere que se traten flexiblemente los papeles de las variables que intervienen, y la acotación contextual de los significados que podrían tener fuera del programa y la forma abstracta de tratarlos dentro de éste.

(4) La tendencia a aceptar sólo las soluciones numéricas y no las algebraicas. A los alumnos no les suelen satisfacer las soluciones como $x = 1/2\ s - 1/2\ v$. Al final, quieren saber qué valor representa x. Esto se denomina el "obstáculo de la respuesta esperada".

(5) Las limitaciones del CAS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas para ayudarle a superarlas. Algunas veces, como es el caso del ejemplo de la introducción, o no hay una orden directa para llevar a cabo una tarea, o bien, el CAS es incapaz de realizarla sin ayuda del usuario. Para obtener un resultado en tales casos, se necesitan la pericia del usuario y las capacidades del CAS.

(6) La incapacidad para decidir cuándo y cómo puede ser útil el álgebra computacional. Los usuarios experimentados saben para qué puede usarse el CAS y cómo les permite trabajar en una determinada situación de problema. Los principiantes, por el contrario, no tienen este sentido de lo que puede esperarse razonablemente de esta herramienta.

(7) El carácter de caja negra del CAS. Usualmente, el CAS no da idea de la forma en que obtiene sus resultados. Esto significa que, por lo general, los estudiantes son incapaces de verificar el procedimiento. Para ellos, el CAS tiene un carácter de caja negra. Y podrían sentirse incómodos estando a merced de un ingenio difícilmente controlable.

Algunos de estos obstáculos pueden relacionarse con la teoría de la *Educación Matemática Realista*. Según ésta, es esencial, desde un principio, un enfoque de abajo-arriba que cree oportunidades de reinvención y formalización progresiva. Desde esta perspectiva, el enfoque arriba-abajo unido el carácter de caja negra de la herramienta CAS y combinado a menudo con cierta idiosincrasia personal puede producir obstáculos en el aprendizaje.

Respecto a la lista de identificación de obstáculos, pueden hacerse dos observaciones. En primer lugar, los obstáculos son de diferente naturaleza. Los obstáculos 5, 6 y 7 tienen un carácter global; tratan del uso de la máquina en general, y de la relación entre el plan de resolución del problema y su ejecución en el entorno de álgebra computacional. Los cuatro primeros obstáculos tienen un carácter más local; se refieren a un tema en particular -en este caso, álgebra - y la forma en que lo trata el CAS. El término "local" no significa que no sea importante: el tema de las expresiones equivalentes en el primer obstáculo, por ejemplo, es esencial para la comprensión del álgebra, y, en este sentido, es global dentro del dominio de esta rama; sin embargo, no afecta a la estrategia global del uso del álgebra computacional para resolver un problema matemático. En lo que sigue se distingue entre obstáculos globales y obstáculos locales "microdidácticos".

En segundo lugar, tenemos la cuestión de si los obstáculos son producidos realmente por CAS. Parece más bien que hay que considerarlos como obstáculos cognitivos ya existentes, que, simplemente, llegan a ponerse de manifiesto y a revelarse más importantes al trabajar en un entorno de álgebra computacional.

Las observaciones sobre los obstáculos locales me motivaron para concentrar mi investigación sobre el aprendizaje del álgebra, en particular en el concepto de parámetro. Por ello, la mayoría de los ejemplos que aparecen en este trabajo son algebraicos.

Los obstáculos locales y la Teoría de la Instrumentación

Como se dijo en el apartado anterior, algunos de los obstáculos locales pueden relacionarse con la teoría de la Educación Matemática Realista. Otro marco teórico, provechoso para comprender las dificultades del uso efectivo de la tecnología, es el punto de vista de la Teoría de la Instrumentación (Rabardel 1995; Artigue 1997; Lagrange 1999a, 1999b, 2000; Trouche 2000). Para una explicación de esta teoría remito a Guin y Trouche (2002). Para el propósito de este artículo, los puntos principales de la teoría son la noción de génesis instrumental y el concepto de esquema de instrumentación.

La génesis instrumental es, en resumen, el proceso que ha de seguir el usuario mientras aprende a trabajar con la herramienta (tecnológica). Para llegar a ser capaz de usarla de manera productiva, el aprendiz tiene que desarrollar esquemas de instrumentación. Estos esquemas, junto con la herramienta física, el 'artefacto', conforman el instrumento. Frecuentemente, este proceso requiere tiempo y esfuerzo.

Dentro de un esquema de instrumentación se entrelazan dos componentes, una técnica y otra mental. La parte técnica atañe a la secuencia de acciones que se realizan en una máquina para alcanzar un determinado objetivo. En el caso de los instrumentos tecnológicos matemáticos, la componente mental consiste en los objetos matemáticos implicados, y en una imagen mental del proceso de resolución del problema y de las acciones de la máquina. Estas concepciones matemáticas son parte del esquema de instrumentación, y pueden incluso ampliarse más durante el desarrollo del esquema. Las destrezas técnicas y los algoritmos por un lado, y las ideas conceptuales por otro, están inextricablemente ligados en el esquema de instrumentación. El concepto de esquema de instrumentación se encuentra elaborado con detalle en Guin y Trouche (2002).

Por tanto, la génesis instrumental es el proceso de construcción de esquemas, que consiste tanto en técnicas, como en concepciones que dan significado a las técnicas. En este sentido, la Teoría de la Instrumentación está en línea con los puntos de vista generales sobre el papel que desempeñan los símbolos y la simbolización en la educación matemática (Gravemeijer et al., 2000). El punto de partida aquí es que existe una relación dialéctica entre la simbolización y la construcción del significado. Sin embargo, la elaboración de la relación entre la Teoría de la Instrumentación y las teorías de la simbolización, va más allá del alcance de este artículo.

El valor de la Teoría de la Instrumentación estriba en que proporciona un modo específico para contemplar la interacción entre el estudiante y la herramienta tecnológica y, particularmente, muestra cómo los obstáculos aparentemente técnicos pueden relacionarse con dificultades conceptuales. Por consiguiente, prestar atención a los obstáculos técnicos afecta frecuentemente a los aspectos conceptuales y puede provocar, por tanto, el desarrollo conceptual.

Concretemos la teoría. El ejemplo de la introducción se refiere a transformar $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 1$ en $(x+y)^3 + 1$. ¿Qué se necesita para ser capaz de llevar a cabo con éxito la secuencia de acciones indicadas en las líneas #6, #7 y #8 de la figura 1? Primero: el alumno tiene que observar la expresión que ha de transformarse y tener la habilidad de darse cuenta de que es simétrica en x e y, lo que constituye una destreza conceptual. Segundo: debería concluir que, en este caso, tiene sentido considerar $x+y$ como factor, lo cual es también una actividad mental. Entonces, la cuestión es cómo ejecutar esto en el entorno de álgebra computacional. Se requiere no sólo el dominio de la sintaxis de sustitución, sino también la idea de que no se puede sustituir $x+y$, pero que la sustitución de y por $z - x$ es una buena alternativa. Esto conduce a #6 y, simplificando, a #7. Luego, se necesita, una vez más, alguna actividad mental: si queremos tener una expresión en x e y, debe escribirse $x+y$ en lugar de z, lo que puede hacerse directamente esta vez. Si esta combinación de concepciones mentales y acciones técnicas, se realiza varias veces en situaciones similares, puede convertirse en un esquema de instrumentación y llegar a formar parte del "repertorio" del estudiante.

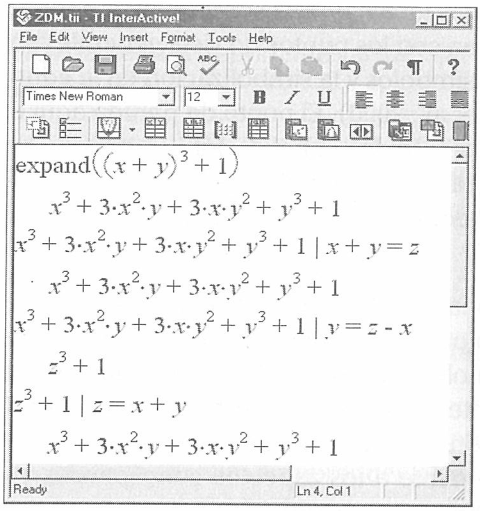

Figura 2. Sustitución en TI-Interactive

En situaciones semejantes, observé que había alumnos tratando de sustituir x+y por z. En *TI-Interactive* –un paquete de programas relativamente nuevo que integra procesador de textos y CAS– esta sustitución no tiene efecto (ver figura 2), lo que puede desconcertar al usuario. Muestra una falta de conocimiento de la sintaxis de sustitución, pero también una concepción limitada del procedimiento de sustitución. Hacer y = z – x constituye un paso en la dirección correcta y da por resultado z^3+1. Una segunda sustitución de z por x+y no lleva al esperado $(x+y)^3+1$ debido a la simplificación automática del programa. Esto ilustra que la relación entre concepción matemática y destrezas técnicas depende de la herramienta: la simplificación automática de *TI-Interactive* establece una diferencia respecto a *Derive*. Si se usara *Maple*, la disponibilidad de las subórdenes de álgebra afectaría a la instrumentación.

En el segundo experimento de enseñanza, que tuvo lugar en el nivel 9, la Teoría de la Instrumentación se aplica a la sustitución de expresiones y a la resolución de ecuaciones paramétricas (Drijvers y Van Herwaarden, 2000, 2001). Esto nos lleva a tres nuevos obstáculos locales algebraicos que añadir a nuestra creciente lista:

(8) La limitada concepción de la sustitución algebraica. Con frecuencia, los alumnos creen que la sustitución se limita a “reemplazar por valores numéricos”. Esta concepción tiene que extenderse a la sustitución algebraica de expresiones.

(9) La limitada concepción de la solución algebraica. Consiste en creer que resolver es sólo "calcular un valor numérico". Esta idea ha de ampliarse a soluciones algebraicas, incluyendo expresar una variable en función de otras.

(10) La concepción de una expresión como un proceso. Los alumnos consideran frecuentemente que una expresión es un medio conciso de describir un proceso de cálculo. Esta concepción debe extenderse a considerarla como un objeto, como algo que puede utilizarse, por ejemplo, ser sustituido en una ecuación.

El último obstáculo es el más relevante de los tres. En álgebra, la dualidad proceso-objeto es muy importante. Varios autores (Sfard, 1991; Tall y Thomas, 1991; Gray y Tall, 1994; Tall et al., 2000) argumentan que los objetos matemáticos tienen tanto un aspecto procedimental como estructural. Tratar flexiblemente esta doble naturaleza constituye una importante destreza algebraica. Wenger (1987) y Arcavi (1994) señalan que la habilidad para ver parte de una fórmula como una entidad que puede utilizarse, transformarse o sustituirse, es un fuerte indicador del "sentido simbólico". Este asunto guarda íntima relación con el obstáculo (1) en el apartado 2 sobre fórmulas equivalentes.

A la luz de la Teoría de la Instrumentación, el obstáculo puede definirse así: Tiene lugar un obstáculo cuando las componentes técnica y conceptual de un esquema de instrumentación no están equilibradas, bien sea porque la técnica no está acompañada por el significado y la concepción apropiada, o porque faltan las habilidades técnicas que se requieren para realizar una idea conceptual. Esta descripción es más simétrica que la dada en el apartado 2, y no "echa la culpa" sólo al CAS de todos los problemas. Además, sugiere también que el desarrollo conceptual es parte del proceso de instrumentación en general, y del proceso de superación de obstáculos en particular. En este sentido, los obstáculos constituyen oportunidades para aprender.

Los obstáculos globales y el triángulo pantalla-papel-mente

En el apartado anterior, se consideró crucial para una instrumentación apropiada la relación entre las técnicas un entorno de álgebra computacional y las concepciones mentales de los alumnos. Los que empiezan a trabajar en álgebra computacional tienen, por lo general, una larga experiencia con técnicas en otro medio: las de lápiz y papel. Éste es su principal marco de referencia y, consecuentemente, parece apropiado considerar la relación entre las nuevas "técnicas de pantalla" y aquellas viejas técnicas "de lápiz y papel" (Drijvers, 2002).

Como ya se ha indicado, y contrariamente a lo que se pudiera pensar, las técnicas no desaparecen ni pierden relevancia en un entorno de álgebra computacional. Como Lagrange puntualiza:

"Encontramos un supuesto común: CAS aligera el trabajo técnico al hacer matemáticas, y, entonces, los estudiantes se centran en la aplicación o en la comprensión. [...] Nuestra encuesta realizada en aulas francesas no mostró ni un claro alivio en los aspectos técnicos del trabajo, ni un aumento definido de la reflexión conceptual de los alumnos. [...] Las dificultades técnicas en el uso de CAS sustituyen a las que corrientemente encuentran los alumnos en los cálculos con lápiz y papel. La mayor facilidad de cálculo no acrecentó automáticamente la reflexión y comprensión del alumnado." (Lagrange, 1999b, p. 144)

Teóricamente, la concepción mental, la técnica de lápiz y papel y la de álgebra computacional deberían ser los tres lados de un triángulo integrado, apoyándose cada una en otra. Para las técnicas de lápiz y papel y las técnicas de álgebra computacional, se requieren dos condiciones: la una debe ser congruente con la otra, y la de álgebra computacional debe resultar transparente al alumno.

Por congruencia entendemos que una técnica ejecutada en ambos entornos puede reconocerse como tal, y se percibe como dos realizaciones distintas de la misma técnica, en vez de dos técnicas diferentes, sin relación. Por ejemplo, la sintaxis y la notación en el entorno del álgebra computacional debería resultar "natural" desde la perspectiva de la de papel y lápiz. No significa esto que se ignore la diferencia entre ambos medios; por ejemplo, es importante que los alumnos sean conscientes de la flexibilidad de la técnica de lápiz y papel y de la potencia del álgebra computacional.

Transparencia significa que el alumno es capaz de "ver a través" del modo en que el entorno del álgebra computacional encuentra y presenta sus resultados, basándose en su experiencia con lápiz y papel. Esto resulta difícil, ya que los algoritmos de álgebra computacional generalmente son más complejos que las técnicas de lápiz y papel. Por ejemplo, la sustitución en un CAS es frecuentemente transparente, mientras que resolver o simplificar no suele serlo. No obstante, las características simples de las herramientas del álgebra computacional, tales como la presentación de resultados en una forma comprensiva y el proporcionar información razonable sobre errores eventuales, puede incrementar la transparencia.

Si se cumplen las condiciones de congruencia y transparencia, los alumnos pueden relacionar los diferentes tipos de técnicas; por ejemplo, transferir la resolución del problema con lápiz y papel al entorno del álgebra computacional, o usar notaciones de ésta en su trabajo con lápiz y papel. Las dos observaciones que siguen, relativas al tercer experimento, ilustran la interferencia entre ambas técnicas:

Primera, Martin está resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$x \cdot y = 540$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 39$$

En el entorno del álgebra computacional, Martin prefiere despejar y en cada una de las ecuaciones e igualar los segundos miembros, aunque es más corto despejar y en sólo una de las ecuaciones y sustituir el resultado en la otra. Mi conjetura es que este comportamiento deriva del enfoque similar del problema con papel y lápiz con el que Martin está familiarizado: su libro de texto presenta con frecuencia funciones y gráficas como contextos para las ecuaciones, y, por lo general, la y aparece ya despejada. Y, dicho sea de paso, muchos CASs pueden resolver directamente el sistema dado.

Segunda: Dustin está resolviendo un sistema de ecuaciones con lápiz y papel. Esto ocurrió después de un experimento con la TI-89, y en este momento no dispone de la calculadora. Como muestra la figura 3, Dustin utiliza la barra vertical para indicar la sustitución, lo que está claramente inspirado por la notación de la TI-89. La notación CAS le resulta tan natural, que la transfiere a su trabajo con papel y lápiz.

$$\underline{y} = a - x$$
$$\underline{x^2 + y^2 = 10} \mid y = a - x$$

Figura 3. Transferencia de notación.

En general, mis observaciones de clase sugieren que esta transferencia tiene lugar para la técnica de la sustitución, pero sólo de forma limitada en la resolución de ecuaciones.

Si la transparencia y la congruencia son las condiciones para establecer la conexión entre las técnicas del álgebra computacional y las de papel y lápiz, ¿cuáles son sus contrarias? Pienso que son la pseudo-transparencia del álgebra computacional, el fenómeno de la doble referencia y el carácter, ya mencionado como obstáculo 7, de caja negra.

Pseudo-transparencia (Artigue, 1997) significa que la técnica en el entorno del álgebra computacional se aproxima a la del lápiz y papel, pero no es exactamente la misma; tiene, a veces, diferencias bastante sutiles. Por ejemplo, si se introduce (x + 5)/ 3, en muchos CASs es necesario utilizar paréntesis, pero en la pantalla no aparecen. De hecho, la barra horizontal de fracción en $\frac{x+5}{3}$ puede considerarse como una notación especial para los paréntesis del numerador, pero los alumnos, frecuentemente, no se dan cuenta de ello. De manera semejante, los paréntesis utilizados para introducir la raíz cuadrada de una expresión, desaparecen inmediatamente después de efectuada la acción. Como consecuencia de esta pseudo-transparencia, los estudiantes que están trabajando en un entorno de álgebra computacional, muchas veces no "están descubriendo matemáticas", como es de esperar, pero quizás están "descubriendo el programa" con todas sus peculiaridades. Esto es lo que significa la doble referencia: referirse a las representaciones específicas del instrumento de álgebra computacional, en lugar de referirse a los conceptos matemáticos.

El carácter de caja negra de la mayoría de las herramientas de álgebra computacional (obstáculo 7) puede prevenir a los alumnos de ver la congruencia entre el uso de la máquina y las técnicas de papel y lápiz. Esto parece constituir un obstáculo para ellos, que pueden sentirse incómodos cuando no son capaces de ejecutar algunas técnicas a mano, y "confían en la tecnología" sin tener medios de comprobación. Atribuyo el hecho aparente de que los alumnos tengan dificultades con la transferencia respecto de la resolución de ecuaciones al carácter de caja negra que posee la resolución de ecuaciones en el entorno de álgebra computacional.

Este apartado puede resumirse diciendo que la integración de las concepciones mentales, las técnicas de lápiz y papel y las de álgebra computacional es un elemento importante en el aprendizaje de matemáticas al utilizar álgebra computacional. La observación de las dificultades para lograrla añade un nuevo obstáculo global a nuestra lista:

(11) La difícil transferencia entre CAS y la técnica de lápiz y papel, debida a la falta de congruencia entre las técnicas en los dos medios. Los factores que intervienen son el carácter de caja negra y la no transparencia de la herramienta del álgebra computacional.

Alternado obstáculos globales y locales: un ejemplo

Hasta ahora, se ha establecido la distinción entre obstáculos globales y locales, se han identificado varios obstáculos y se ha relacionado la descripción de un obstáculo con la Teoría de la Instrumentación. El presente apartado contiene una larga observación en clase de una alumna del nivel 10, María, que muestra cómo interfieren los obstáculos globales y locales. Antes de la observación, María y sus compañeros utilizaron calculadoras gráficas TI-89 durante tres semanas. Trabajaron sobre tareas en las que se cambiaba el valor de un parámetro mediante la "barra vertical". De esta forma estudiaron el efecto sobre una parábola y percibieron el parámetro como "una letra que determina la posición de la parábola". María trabajó con la tarea de la figura 4.

Abajo se muestra un haz de gráficas de la familia $y = x^2 + b \cdot x + 1$. Vamos a fijarnos en los vértices de la parábola.

A) Señala y une los vértices. ¿Qué clase de curva te parece que se obtiene?

B) Expresa las coordenadas del vértice de un miembro de la familia respecto a b. Pista: el mínimo está situado entre las raíces, si las hubiese.

C) Halla la ecuación de la curva que pasa por todos los vértices.

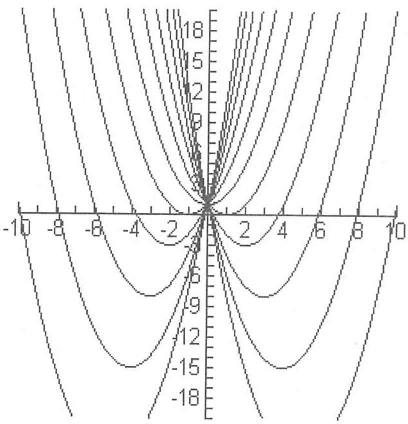

Figura 4: Haz de gráficas

María cree que la cuestión A) le pide que reproduzca la figura con la TI-89. Luego, introduce **Y1 = x^2 + a∗x + 1** en la lista de funciones de la TI-89. Entonces, ve que el parámetro se denomina por b, trata de corregir esto pero no lo consigue, borra la función completa e introduce **Y1 = x^2 + b*x+ 1, |b =** . A continuación se pregunta cuáles son los valores de b. Elige –5, –4, –3, ... 4, 5. Ajusta las dimensiones de la ventana usando equivocadamente la tecla menos; corrige y obtiene un bonito diagrama (ver figura 5). Consiguió superar los pequeños obstáculos locales, y está orgullosa y es feliz.

María: ¡Funciona! ¡Esto es una revolución en mi calculadora!

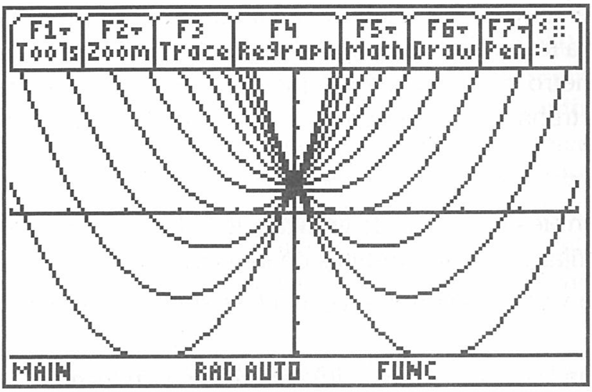

Figura 5. Haz de gráficas de María en una TI-89

En la cuestión B) se sugiere hallar primero las raíces. María introduce **solve (x^2 + b*x + 1, x)**, lo cual da un mensaje de error pues falta "=0". Otras herramientas de computación algebraica no son tan estrictas en cuanto a la diferencia entre expresiones y ecuaciones, y habrían aceptado esta entrada. Esto es un problema de instrumentación con solve (obstáculo 9). A María no le gusta el mensaje.

María: ¡Esta calculadora me odia!

Entonces, prueba con **solve (x^2 + b*x + 1, x|** . Parece considerar la sustitución (obstáculo 8). Cambia x por b: **solve (x^2 + b* x + 1, b)**, pero tampoco funciona. Un ejemplo del papel de la confusión (obstáculo 3). Vuelve entonces a su gráfica y la proyecta al resto de la clase. No supera los obstáculos referentes a resolver y sustituir, y se termina la clase.

En la clase siguiente, María introduce de nuevo la expresión que, aparentemente, se había borrado. Y, esta vez, olvida el signo de multiplicar entre b y x; escribe **Y1 = x^2 + bx + 1**. No aparece ninguna gráfica, ni siquiera después de añadir los valores del parámetro. Cuando el observador indica que falta el signo de multiplicar, María corrige y obtiene el mismo diagrama que en la clase anterior.

María: Oh, tiene que ser el "por"; nunca hago nada del todo bien.

Una vez más, intenta hallar las raíces. Introduce **solve (x^2 + b*x + 1 = y , b)** ya que ahora sabe que se trata de una ecuación, no de una expresión, pero escribe y en lugar de 0, y resuelve respecto a b, no respecto a x. La máquina responde: b = **(-x^2 - y + 1) / x.** Parece centrarse sobre b; probablemente porque se menciona b en la tarea, y no distingue entre los papeles que desempeñan las diferentes letras (obstáculo 4).

María introduce ahora **solve(b=(-x^2-y+ 1) / x) | b = 5).** Probablemente desea obtener un valor numérico, en vez del general b (obstáculo 3). Pero, a causa de los errores en la orden de resolución (obstáculo 9), esto no funciona. En el siguiente intento, incluye la letra respecto a la que hay que resolver la ecuación: **solve (b = (- x^2 - y + 1) / x, x | b = 5),** pero los paréntesis no están bien colocados. Borra la barra y escribe 5 a mano: **solve (5 = (- x^2 - y + 1) / x, x).** Esto proporciona una expresión de x en función de y, que no parece servirle de ayuda.

María: No entiendo nada, soy muy tonta.

Vemos aquí el obstáculo global de la incapacidad de llevar a cabo la estrategia de resolución del problema en un entorno tecnológico (obstáculo 6). Uno puede preguntarse si María tiene en mente un estrategia clara de resolución.

Con ayuda del observador, María se da cuenta de que, para hallar los puntos de intersección con el eje de abscisas, debe sustituir y por 0. Esto da los valores de x correspondientes a las raíces en función de b (ver figura 6). Un buen resultado, que se podía haber obtenido de una manera más directa.

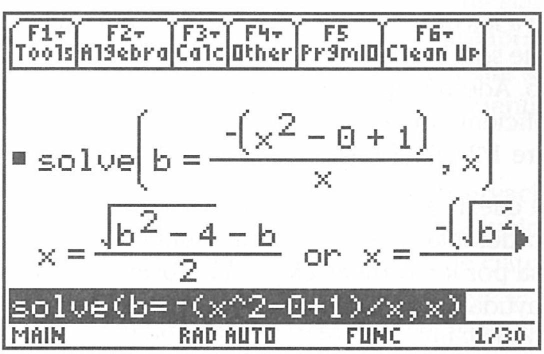

Figura 6: Las raíces en función del parámetro b

María copia esta fórmula en su cuaderno, pero tiene dificultades para leer la solución: el signo de la raíz cuadrada es demasiado largo en la segunda solución (ver figura 7).

$$\text{nulpunten} = \frac{\sqrt{b^2-4}-b}{2} \quad \text{en} \quad \frac{-(\sqrt{b^2-4}+b)}{2}$$

$$\text{midden} = -\frac{1}{2}b.$$

Figura 7: Copia de las soluciones en el cuaderno

Ahora que tiene la solución general para las raíces, parece que quiere concretar los valores para b, antes de continuar.

María: Pero entonces tienes que sustituir un valor para b, ¿verdad?.

Luego.

María: Pero, ¿de que sirve saber que el valor extremo cae en medio de las raíces, si no sabes calcularlo?

Se ve aquí la presencia del obstáculo 2 sobre la preferencia de los resultados numéricos, y del obstáculo 10 referente a la percepción de las expresiones como respuestas. María parece sufrir las consecuencias del llamado obstáculo de la "falta de clausura": a menos que tengas un valor para los parámetros, no puedes calcular algo, y no puedes continuar.

No obstante, María, con alguna ayuda del observador, acepta seguir con las expresiones. Con algún esfuerzo, obtiene el promedio de las dos soluciones generales de x, y llega a que la abscisa del vértice de la parábola es – b/2, lo cual le satisface.

María: Bueno, al final lo hallé fácilmente.

Para hallar la ordenada correspondiente al vértice da la parábola, sustituye x =–b/2 utilizando **solve (y = – 0 * 5 b^2 + b * – 0 * 5 + 1, y)**, enfrentándose a los obstáculos 8 y 9. Olvida los paréntesis que abrazan a – b/2, con lo que sólo b queda elevado al cuadrado. El resultado $y = 1 - b^2$ no es correcto. Además, usar solve para efectuar una sustitución no es una manera eficiente de trabajar. A propósito, no parece preocuparle la diferencia entre 1/2 y 0.5 (obstáculo 2).

En cuanto a la cuestión C), María anota en su cuaderno que los vértices tienen por coordenadas $(-1/2b, 1 - b^2)$, y concluye que la ecuación de la curva que pasa por los vértices es $y = (1 - b^2)\cdot x - 1/2\cdot b$. Pero, probablemente con la ayuda de un compañero, corrige su error y acaba escribiendo la fórmula correcta:

$$y = 1 - x^2$$

Revisando el comportamiento de María, como resolutor de problemas, se pueden reconocer muchos de los obstáculos previamente identificados. La observación muestra también cómo pueden alternar e interferir las distintas clases de obstáculos.

Algunos de los obstáculos más técnicos no malogran el proceso de resolución del problema. Por ejemplo, al final, María pasa por alto la diferencia entre fracciones y decimales, pero esto no impide su progreso. También, corrigió fácilmente el uso erróneo de la tecla menos mientras cambiaba las dimensiones de las ventanas. En otras ocasiones, por ejemplo, al no poner el signo de la multiplicación entre dos variables, los detalles técnicos pueden consumir mucho tiempo, frustrar el proceso y llevar a perder la pista de la estrategia de resolución del problema, mientras se trata de superarlos. Estos relativamente sencillos problemas sintácticos, que pueden deberse a las características de la herramienta de computación algebraica, tienen, sin duda, importantes influencias.

Se muestra también en el antedicho proceso una categoría más seria de obstáculos, cuando los problemas técnicos se relacionan con la concepción de las matemáticas implicadas. Consideremos, a modo de ejemplo, los problemas que tiene María con la resolución de ecuaciones. Intenta resolver expresiones en vez de ecuaciones, resuelve en función de una variable equivocada u olvida indicar la variable, y parece confundir resolver con sustituir. Los obstáculos que encuentra le impiden proseguir con su planes originales y le llevan a un comportamiento erróneo. Conjeturo que una concepción más madura de la resolución, incluyendo "aislar" una variable para expresarla en función de otras, podría haberle ayudado. La concepción de una fórmula como un objeto es también un factor a tener en cuenta.

Al comportamiento de María en la resolución del problema parece faltarle una dirección clara; da la impresión de que no tiene clara una estrategia general. Puede deberse al contexto geométrico, al papel del parámetro en la dinámica de la gráfica, a que no tiene claro lo que significa la pregunta, o bien, a que los obstáculos globales que encuentra invalidan su plan global.

Como un nuevo elemento a tener en cuenta, la observación indica que no es evidente una interpretación coherente del resultado suministrado por el ordenador. La expresión de María de la falta de clausura, así como su error al copiar la fórmula de solución, sugieren que el significado de los resultados proporcionados por la máquina no están claros para ella. Esto nos lleva a formular un último obstáculo:

(12) La dificultad de interpretar el resultado suministrado por el CAS.

Los comentarios de María a lo que está ocurriendo, sus sentimientos de victoria cuando tiene éxito y su frustración cuando las cosas no van bien, indican que los obstáculos pueden crear emociones fuertes que impiden avanzar. Esto constituye, por sí sólo, una razón para considerar seriamente los obstáculos.

De este episodio pueden extraerse las siguientes conclusiones:

Primera, las observaciones muestran cómo los obstáculos locales llevan a perder la pista de la estrategia global de resolución del problema.

Segunda, conjuntamente se ponen de manifiesto muchos de los obstáculos previamente identificados.

Tercera, se observa la relación entre las dificultades técnicas y las conceptuales, tan enfatizada en la Teoría de la Instrumentación.

Cuarta, se identifica una nuevo obstáculo, que concierne a la incapacidad para comprender el resultado suministrado por un instrumento de álgebra computacional.

Conclusión: los obstáculos constituyen oportunidades

En este trabajo se identifican los obstáculos que encuentran los alumnos al trabajar en un entorno de álgebra computacional. A saber:

(1) La diferencia entre las representaciones algebraicas que proporciona CAS y las que los alumnos esperan y conciben como “sencillas”.

(2) La diferencia entre cálculos numéricos y cómputos algebraicos y la forma implícita con que CAS trata esta diferencia.

(3) La flexible concepción de las variables y los parámetros que requiere el uso de un CAS.

(4) La tendencia a aceptar sólo las soluciones numéricas y no las algebraicas.

(5) Las limitaciones del CAS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas para ayudar al CAS a superarlas.

(6) La incapacidad para decidir cuándo y cómo puede ser útil el álgebra computacional.

(7) El carácter de caja negra del CAS.

(8) La limitada concepción de la sustitución algebraica.

(9) La limitada concepción de la solución algebraica.

(10) La concepción de una expresión como un proceso.

(11) La difícil transferencia entre CAS y la técnica de lápiz y papel, debida a la falta de congruencia entre las técnicas en los dos medios.

(12) La dificultad de interpretar el resultado suministrado por el CAS.

Se distinguen dos clases de obstáculos: globales (5, 6, 7, 11, 12) y locales (1, 2, 3, 4, 8, 9, 10). Para la última categoría, la Teoría de la Instrumentación hace hincapié en la relación entre la técnica de la máquina y la concepción matemática. Además, la falta de congruencia entre la técnica de la máquina y la de papel y lápiz puede también desempeñar un papel, así como la falta de transparencia de la herramienta de computación algebraica.

Merece la pena considerar las limitaciones de este inventario. Primera, no pretende ser exhaustivo; los obstáculos identificados aparecen fuertemente en diferentes ocasiones. Segunda, los obstáculos locales dependen del sujeto, esto es, surgen de la perspectiva del papel del álgebra computacional en la educación del álgebra. Así, para otro enfoque, la lista de obstáculos locales podría ser diferente. Yo conjeturo, sin embargo, que el carácter dual de este tipo de obstáculos, que comparten la interferencia de aspectos técnicos y conceptuales, excede la dependencia del sujeto: si el tema no fuera álgebra con parámetros, los obstáculos locales podrían tener un carácter dual similar. Esto apoyaría la Teoría de la Instrumentación de las herramientas tecnológicas.

Existen dos razones por las que los obstáculos observados deberían tomarse en serio en las clases. La primera se señaló en el apartado anterior: enfrentarse con obstáculos puede producir irritación y frustración en el alumnado. Aunque convivir con la frustración es parte de hacer matemáticas, en algunos casos puede ser contraproducente. En la enseñanza, ignorar los obstáculos puede amplificar este efecto.

Una segunda razón probablemente, más importante, para considerar los obstáculos con seriedad, es que éstos ofrecen oportunidades para aprender. Según la descripción hecha en el apartado 3, los obstáculos integran frecuentemente un aspecto técnico y otro conceptual. Por consiguiente, trabajar para superar un obstáculo, con frecuencia significa también trabajar para el desarrollo conceptual de las matemáticas involucradas. Muchos de los obstáculos parecen ser, al menos parcialmente, obstáculos cognitivos existentes que, simplemente, se ponen de manifiesto en el entorno del álgebra computacional. En consecuencia, investigar cuál es realmente el problema, descubrir qué "lógica" está detrás de una determinada sintaxis, descubrir el significado del resultado proporcionado, e inventar una nueva estrategia más viable en el entorno del álgebra computacional, proporcionan oportunidades para una mejor comprensión, un mejor desarrollo conceptual y una buena disposición hacia las matemáticas. En este sentido, los obstáculos constituyen oportunidades para aprender, que pueden explotarse tanto en interacción con los estudiantes individualmente como en las discusiones con el conjunto de la clase.

Como una consecuencia para la enseñanza, recomiendo una estrategia pedagógica consistente en tratar seriamente los obstáculos, prestarles atención y aprovechar las oportunidades que ofrecen. Como Simon (1995), en un sentido más general que el trabajar con el álgebra computacional, estableció :

> "Las dificultades conceptuales que yo he observado en los estudiantes no deben evitarse; por el contrario, proporcionan retos particulares que, si son manejados con éxito por los alumnos, dan como resultado un crecimiento conceptual" (Simon 1995, p. 139)

En lugar de tratar de ignorar los obstáculos encontrados, sugiero hacerlos objeto de una discusión de aula en la que se desarrolle el significado de las técnicas y de las concepciones. Las ideas matemáticas que están detrás de los obstáculos deberían considerarse explícitamente, y se debería utilizar el entorno de álgebra computacional como un objeto de estudio inspirador, no como un "oráculo". Creo que tal enfoque convierte los obstáculos relativos al uso del álgebra computacional, en oportunidades de aprendizaje, y enriquece el discurso matemático en las aulas.

Referencias

Arcavi, A. (1994): "Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics". *For the Learning of Mathematics,* 14(3), 24-35.

Artigue, M. (1997): "Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage". *Educational Studies in Mathematics,* 33,133-169.

Drijvers, P. (2000): "Students encountering obstacles using a CAS". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(3),189-209.

Drijvers, P. (2002): "Algebra on a screen, on paper and in the mind", en Fey, J.; Cuoco, A.; Kieran, C.; McMullin, L.; Zbiek, R. M. (Editores), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston.

Drijvers, P.; Van Herwaarden, O. (2000): "Instrumentation of ICT-tools: the case of algebra in a computer algebra environment". *International Journal of Computeralgebra in Mathematics Education, 7*(4), 255-275.

Drijvers, P.; Van Herwaarden, O. (2001): "Instrumentation of ICT-tools: the case of algebra in a computer algebra environment", en Herget, W.; Sommer, R. (Editores), *Lernen im Mathematikunterricht mit Neuen Medien,* 9-20. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Gravemeijer, K. P. E.; Cobb, P.; Bowers, J.; Whitenack, J. (2000): "Symbolizing, Modeling, and Instructional Design", en: P. Cobb; E. Yackel; K. McClain (Edtores.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*, 225-273. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gray, E.M.; Tall, D.O. (1994): "Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic". *Journal for Research in Mathematics Education* 25(2), 116-140.

Guin, D.; Trouche, L. (2002): "Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations". *ZDM* 34 (5).

Heugl, H.; Kutzler, B. (1993): *Derive in Education, Opportunities and Strategies.* Bromley: Chartwell-Bratt.

Lagrange, J.-b. (1999a): "Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus". *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 4, 51–81.

Lagrange, J.-b. (1999b): "Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: a two-year classroom experiment with the TI-92". *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education,* 6(2), 143-165.

Lagrange, J.-b. (2000): "L'intégration d'instruments informa-tiques dans l'enseignement: une approche par les techniques". *Educational Studies in Mathematics,* 43, 1-30.

Rabardel, P. (1995): *Les hommes et les technologies - approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin. París.

Sfard, A. (1991): "On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin". *Educational Studies in Mathematics* 22,1-36.

Simon, M. A. (1995): "Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective". *Journal for Research in Mathematics Education* 26(2), 114-145.

Tall, D.; Thomas, M. (1991). "Encouraging versatile thinking in algebra using the computer". *Educational Studies in Mathematics* 22, 125-147.

Tall, D.; Thomas, M.; Gary Davis; Gray, E.; Simpson, A. (2000): "What is the Object of the Encapsulation of a Process?" *Journal of Mathematical Behaviour* 18(2), 223-241.

Trouche, L. (2000): "La parabole du gaucher et la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques". *Educational Studies in Mathematics* 41, 239-264.

Wenger, R. H. (1987): "Cognitive Science and Algebra Learning", en A. Schoenfeld (Editor), *Cognitive Science and Mathematical Education.* Lawrence Erlbaum Associates. New Jersey.

Drijvers, Paul, drs, Freudenthal Institute, Utrecht University, Post Box 9432, 3506 GK Utrecht, The Netherlands
correo electrónico: p.drijvers@fi.uu.nl